

等效同質體法在鋼纖維混凝土材料強度及結構分析之應用

鄧作樑* 璩貽安** 張福安*** 金驊生****

*大葉大學機械與自動化工程學系

**中山科學研究院四所

***國防大學中正理工學院軍事工程研究所

****國防大學中正理工學院國防科學研究所

摘要

本文參考以等效同質體法為基礎所發展計算含短纖壓電及發泡複材彈性模數之方法，將其應用於鋼纖維混凝土之材料彈性模數的計算，以評估其等效材料特性。計算結果與實驗量測值及其他不同方法計算鋼纖維混凝土彈性模數之結果進行比較；並將其應用於簡支梁結構分析，計算三分點載重鋼纖維混凝土梁之跨中撓度值。其計算結果並與實驗量測數據進行比對，俾驗證本文方法之正確性。本文所提出之等效材料彈性模數值的計算方法及結果，可以進一步應用在鋼纖維混凝土結構有限元素數值模擬分析，以探討相關工程應用上之結構設計分析。

關鍵詞：等效同質體法，彈性模數，鋼纖維混凝土

Application of the Equivalent Inclusion Method on Material Strength Evaluation and Structural Analysis for Steel-Fiber Reinforced Concrete

Tso-Liang Teng*, Yi-An Chu**, Fwu-An Chang***, and Hua-Sheng Chin****

* *Department of Mechanical and Automation Engineering, Da-Yeh University*

** *Chung-Shan Institute of Science and Technology*

*** *Department of Civil Engineering, Chung Cheng Institute of Technology, National Defense University*

**** *School of Defense Science, Chung Cheng Institute of Technology, National Defense University*

ABSTRACT

The equivalent inclusion method (EIM) is adopted to determine the effective elastic moduli of steel-fiber reinforced concrete (SFRC). The methodology has been applied on calculation of the effective elastic moduli for piezo-electric and porous composite materials. The effective elastic moduli of SFRC, calculated by this method, are compared with experimental results and some other methods. This proposed method is further applied on analysis of a three-point loading simply supported beam. The mid-point deflection, evaluated by the proposed methodology, is consistent with the test results. It indicates that the application of the EIM on evaluation of the effective moduli for SFRC is rational and practical for purposes of engineering design. The methodology proposed in this paper is valuable for further application on finite element numerical analysis of SFRC structures.

Keywords: equivalent inclusion method, effective elastic modulus, steel-fiber reinforced concrete.

文稿收件日期 90.11.4; 文稿修訂後接受日期 91.7.24.

Manuscript received Nov. 4, 2001; revised July 24, 2002.

一、前言

鋼纖維混凝土材料是在混凝土基材中摻入適量鋼絲纖維和添加劑所拌合而成的一種混凝土複合材料。由於鋼纖維能有效地增加混凝土的強度與韌性，且適合大量生產；而混凝土本身亦具有施工維護簡單及抗壓能力強等特點。因此，鋼纖維混凝土材料兼具了鋼纖維與混凝土兩種不同性質材料的優點，而被期許為機場跑(滑)道、軍事防護結構(掩體、防爆牆)、核能電廠圍阻體以及相關民生公共工程用以抗磨損、防爆震(撞擊)之良好建材。以有效吸收飛機降落時機輪對跑道之衝擊載重，同時防止或減少戰時敵人小口徑彈藥攻擊、炸彈爆裂碎片或飛行航空器意外墜落等不同外加荷載對結構體產生之撞擊破壞。由以往在鋼纖維混凝土材料之相關研究中，吾人已瞭解適量鋼纖維的添加具有對混凝土材料抗拉、抗彎以及韌性增強之特性[1,2]。由於，鋼纖維混凝土亦是一種性質相當複雜的複合材料體，因此影響鋼纖維混凝土基本材料性質的因素很多。舉凡鋼纖維的幾何形狀、力學強度、加工方法、體積分率以及混凝土基材的配比、強度、粗(細)骨材摻量及添加劑的使用等，對於鋼纖維混凝土材料的基本性能都會產生不同程度的影響。故於鋼纖維混凝土材料的分析、設計以及實際工程應用的過程中，對於其基本材料性質的充分瞭解則是非常重要的。

根據 1980 年 Velazco [3] 等所述，最早對鋼纖維材料的探索可追溯到 1961 年 Cottrell 及 Well 對鐵、鋼材料之裂縫張開位移 (crack opening displacement) 的研究。此外，Velazco 亦有系統的探討了添加不同體積比的鋼纖維與混凝土強度之間的影響關係。事實上這期間亦有相當多的學者如 O'Leary、Swamy、Hughes 及 Mindess 等[4-7]運用靜態加載實驗的方式來探討添加不同材質、形狀、長徑比及含量之

纖維後，對混凝土基材力學性質或纖維混凝土簡支樑變形量(跨中撓度)以及韌性(能量吸收能力)的影響。另外如 Pakotiprapha、Lim、Henager 及 Nataraja 等[8-11]係以解析或數值計算的方法來預測或計算纖維混凝土樑在靜態加載條件下應力—應變曲線、彎矩—曲率或載重—變位曲線的變化。同時 Laws、Surendra、Tanigawa 和 Li 等[12-15]的解析及數值計算成果亦探討了纖維在基材中的分佈效應，以及纖維間距和裂縫在基材內產生及發展區域等，對基材強度或力學行為的影響。相關的分析、計算結果與實驗數據相比較，均獲得添加適當材質及含量的纖維後可有效提昇混凝土基材力學性質，並且抑制纖維混凝土樑在受到加載後的裂縫產生及變形量；亦即可大幅提高纖維混凝土樑的極限強度和韌性。在國內之相關研究部份，除台灣營建研究院曾進行並舉辦纖維混凝土相關之應用與發展研討會[16-18]外，其他如林草英、黃兆龍、陳振川、詹穎雯及柴希文等，均曾對高性能混凝土及纖維混凝土的材料及工程性質進行了許多相關的實驗研究及理論探討，獲得了相當豐碩的研究成果足供後續研究之參考與應用。另外楊錦懷[19]則針對各種不同表面型態之鋼纖維進行了相關的試驗，探討摻入鋼纖維後對混凝土材料在乾縮、潛變及破裂行為上之影響，同時建立其個別的組成律模式。陳振川及楊鎮安[20]則探討了高流動性鋼纖維及高性能混凝土配比與其基本力學性質。

由於鋼纖維混凝土複合材料的力學性質不易得知，為探討纖維體積含量的變化對纖維複材材料性質之影響，Hashin 和 Shtrikman [21]應用線彈性變分理論(variational principles)推導出任意幾何形狀之擬等向及擬均質性多相複合材料的有效彈性模數上、下限值；當纖維材料之彈性模數比值不大時，其計算所得之有效模數與實驗值相當接近。Hashin 和 Rosen

[22] 運用變異邊界法 (variational bounding method) 探討基材中含有單方向排列之圓形、中空及實心纖維複材整體彈性模數。Whitney 和 Riley [23] 則以近似的解析公式來決定單向纖維加強複材在縱向彈性模數、橫向彈性模數以及剪力模數間的變化, 其計算結果並與實驗值相互比較。Nielsen 和 Chen [24] 應用電腦程式以數值計算的方法求出平面隨機分佈纖維複材平均彈性係數值, 其計算結果亦與實驗值進行比對。Chamis 和 Sendekyj [25] 針對相關學者在纖維複材熱彈性質預測的研究成果, 依據假設條件以及分析方法的不同予以區分與比較。Halpin [26] 運用其與 Tsai 共同提出在纖維複材方向上的彈性模數以及剪力模數公式, 探討單向受力的短纖維複材在定量纖維含量及固定之基材與纖維彈性係數比值下, 短纖維複材在受力方向之彈性模數與纖維長徑比之間的關係曲線。其計算結果顯示, 短纖維複材受力方向彈性模數值會隨著纖維長徑比的增加而提高。Christensen 和 Waals [27] 以理論推導的方式提出了可用以計算二維及三維隨機分佈纖維複材有效加勁性質的簡易預估公式, 其計算結果並與混合法所得數據相互比較。由於混合法計算方式並未將纖維隨機分佈以及纖維與基材間的互制效應等因素納入考量, 因此該作者認為混合法所預測的結果未盡合理。Ahmad 和 Lagoudas [28] 應用 Christensen 和 Waals 所提出之公式, 經簡化後用以計算含有高彈性係數隨機分佈纖維之混凝土有效彈性模數值, 其所得結果並與其他計算方法比對。

由上述相關研究之回顧可知纖維複材材料性質之預測方式甚多, 然而對以鋼絲纖維為添加材料之鋼纖混凝土材料或結構的研究中, 一般仍以實體實驗以及量測的方式為主; 惟實體實驗囿於設備及空間之侷限, 所能採用之試體尺寸十分的有限。如需進行大型實體試

驗則所需耗費之材料準備時間與成本相對較高, 同時鋼纖維混凝土拌合時鋼纖維分佈均勻度的控制亦屬不易, 稍有不慎即可能造成鋼纖維分佈不均甚至揪結成球的現象, 都將影響到實驗結果的正確性。因此, 如欲建立上述鋼纖維混凝土結構分析、設計以及材料係數計算所需之相關資料, 則對鋼纖維混凝土材料基本力學性質的瞭解即成為研究鋼纖維混凝土的重要課題之一。為解決上述困擾, 並提供鋼纖維混凝土結構有限元素數值分析所需之相關材料彈性模數值。本研究中將應用等效同質體法 (Equivalent Inclusion Method; EIM) 理論 [29], 並依據 Huang [30,31], Chao 和 Huang [32,33] 等學者, 對基材內含隨機分佈短纖壓電及發泡複材彈性模數值 (彈性模數 \bar{E} 、剪力模數 \bar{G} 及波松比 $\bar{\nu}$) 的計算方法, 將其應用於具隨機分佈且長徑比 (纖維長度與等效直徑比) 固定之鋼纖維混凝土材料, 計算其在不同鋼纖維含量下等效彈性模數值的變化。計算所得數據並與其他計算材料強度之方法及實驗結果進行比對。此外, 將本文方法計算所得之短纖混凝土等效材料模數應用在三分點載重簡支梁跨中撓度問題分析。其分析結果將與實驗量測所得數據進行比對, 俾驗證本文所提出鋼纖混凝土等效材料彈性模數計算結果之正確性與實用性, 以簡化相關研究的分析程序並減少實體實驗所需花費之時間與經費。本文中所提出之等效材料彈性模數值的計算結果, 應可提供未來軍事防護掩體、民生公共設施以及核能電廠圍阻體等, 相關鋼纖維混凝土結構基礎研究及有限元素數值模擬分析時之參考依據。

二、理論基礎及分析模型建立

等效同質體法 (EIM) 理論其基本概念係將基材中與其材料性質相異的異質體

(inhomogeneity)，以一個幾何形狀相同，但是具有等效特徵應變(eigen-strain) ε_{ij}^* 的同質體(inclusion)來等效。同質體之材料性質與基材相同；亦即經過等效之後的混合體(纖維加基材混凝土)其材料性質相同，但是在局部的區域內(原異質體所佔區域)含有等效特徵應變 ε_{ij}^* ，如圖 1 所示。本節中主要係利用微觀力學的理论，結合 Eshelby 張量[34,35]以及 Mori-Tanaka[36]平均應力的觀念，以等效同質體法推導多向隨機分佈短纖維複材之等效彈性模數理論公式，並以數值方法來計算含隨機分佈圓柱狀鋼纖維混凝土材料之等效彈性模數值。一般在針對短纖維複合材料進行微觀力學分析時，通常所選定之分析模型是一個短纖維埋置在無限域的基材之中，我們稱此短纖維為基材內所包含之異質體以 Ω 來表示該異質體之區域，如圖 1 所示。其餘 $D-\Omega$ 的部份表示包圍在 Ω 以外的無限域基體空間，經轉換後我們稱這個與基體材料性質一致的替代體為等效同質體(equivalent inclusion)。通常材料中的裂縫、孔隙及纖維等均可視其為基材中的異質體。

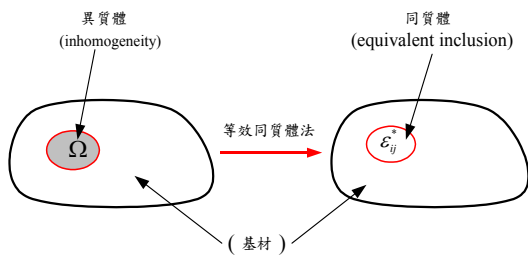


圖 1. 基材、異質體及等效同質體示意圖。

2.1 等效同質體法

當一個足夠大的無限域基材 D 中，包含有一個異質體其材料之彈性模數為 C_{ijmn}^* ，體積分率為 f 。異質體週邊 $D-\Omega$ 的區域稱為基材

(matrix)，其材料彈性模數為 C_{ijmn} 。將基材中的異質體藉由具有等效特徵應變 ε_{ij}^* 的同質體(其材料性質與基材相同均為 C_{ijmn})來等效之方法即稱為等效同質體法。在等效前基材及異質體之虎克定律可表示如下；

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^M = C_{ijmn} \{ \varepsilon_{mn}^0 + \varepsilon_{mn}^M \} \text{ 在 } D-\Omega \text{ 中} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^\Omega &= C_{ijmn}^* \{ \varepsilon_{mn}^0 + \varepsilon_{mn}^M + \varepsilon_{mn} \} \\ &= C_{ijmn} \{ \varepsilon_{mn}^0 + \varepsilon_{mn}^M + \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^* \} \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \end{aligned} \quad (2)$$

其中

σ_{ij}^0 為無異質體存在時基材內之均勻應力

σ_{ij}^M 為異質體存在時基材內之擾動應力

σ_{ij}^Ω 為異質體內局部擾動應力

ε_{ij}^0 為無異質體存在時基材內之均勻應變

ε_{ij}^M 為異質體存在時基材內之擾動應變

ε_{mn} 為異質體內局部擾動應變

ε_{mn}^* 為特徵應變

通常吾人可假設基材中的異質體為橢球狀，因為橢球體的形狀可以從顆粒狀(particle)任意的變化到長纖維(continuous fiber)的形狀。

2.2 單向隨機分佈短纖維複材之勁度張量

當一個足夠大的基體材料 D ，其內中包含有 N 個具相同形狀及材料性質，但任意分佈且方向相同的橢球形異質體 $\Omega = \sum_{k=1}^N \Omega_k$ 其材料之彈性模數為 C_{ijmn}^* ， N 個異質體之總體積分率為 f 。除異質體外週邊 $D-\Omega$ 的區域稱為基材，其材料彈性模數為 C_{ijmn} 。

依據 Mori-Tanaka [36]理論，複材之整體平均應力擾動值為零；

$$f \left(\overline{\sigma_{ij}^\Omega} \right) + (1-f) \left(\overline{\sigma_{ij}^M} \right) = 0 \quad (3)$$

其中 $\bar{\sigma}_{ij}^{\Omega}$ 為異質體內之平均擾動應力， $\bar{\sigma}_{ij}^M$ 為基材內之平均擾動應力。藉由公式(1)~(3)可導出纖維混凝土複材整體等效材料柔度張量式為，

$$\bar{C}_{mnij}^{-1} = \left\{ I_{mnab} - f P_{mnqr}^{-1} (C_{qrab}^* - C_{qrab}) \right\} C_{abij}^{-1} \quad (4)$$

其中 I 為四階單位張量，f 為纖維體積分率，而

$$P_{ijab} = (C_{ijmn}^* - C_{ijmn}) \left\{ (1-f) S_{mnab} + f I_{mnab} \right\} + C_{ijab} \quad (5)$$

其中 S_{ijmn} 為 Eshelby 張量，其值與基材之材料性質與異質體之形狀有關。

複材整體柔度張量 \bar{C}_{mnij}^{-1} 經由 voigt 符號變換可將其轉換為 6×6 矩陣，對於正交性 (orthotropic) 材料之整體柔度張量矩陣與各個彈性模數之間的關係可表示如下：

$$[\bar{C}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\bar{\nu}_{21}}{E_{22}} & \frac{-\bar{\nu}_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\bar{\nu}_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\bar{\nu}_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\bar{\nu}_{13}}{E_{11}} & \frac{-\bar{\nu}_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.3 多向隨機分佈短纖維複材之彈性模數

有關多向隨機分佈短纖維混凝土等效材料整體勁度張量計算，可將單向隨機分佈短纖維混凝土之勁度張量以座標轉換方式，得到在特定方向角之整體勁度張量 \tilde{C} ，將不同方向角之整體勁度張量，依其分佈密度函數 $\rho(\theta, \phi)$ 以

線性疊加的方式計算，即可得到多向隨機分佈鋼纖維混凝土之整體平均勁度張量 \bar{C} ，其轉換及計算方法簡要說明如后。

考慮一個在足夠大的基材中採任意方向存在之同質體，吾人可以 θ 及 ϕ 兩個角度的變化來描述此同質體的方向角，如圖 2 所示 [31]。其中， x_1 、 x_2 及 x_3 為空間參考座標，而 x_1' 、 x_2' 及 x_3' 則為對應於同質體方向角 (ρ, θ) 的局部 (local) 幾何座標。對應於纖維方向角為 (ρ, θ) 之單向隨機分佈短纖維複材整體勁度張量 \tilde{C}_{ijpq} 可以經由座標轉換得到，亦即 $\tilde{C}_{ijpq} = a_{ik} a_{jl} a_{pm} a_{qn} \bar{C}_{klmn}$ 。其中 a_{ik} 等為對應於圖 2 之座標轉換張量 (分量)，而 \bar{C}_{klmn} 則為利用等效同質體法理論所推導在 (x_1, x_2, x_3) 座標系統，且長軸在 x_1 方向之短纖維複材整體勁度張量如(6)式 [30,32]。

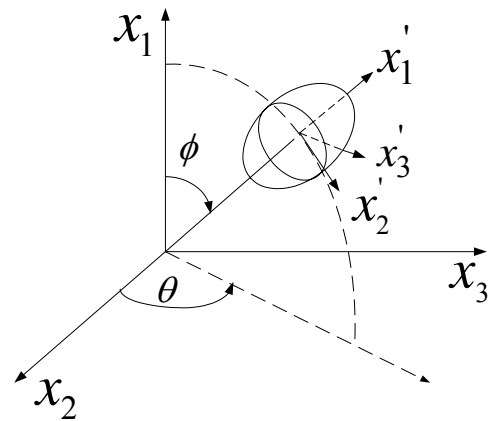


圖 2. 短纖維主軸座標轉換系統示意圖 [31]。

有關多向隨機分佈短纖維複材整體平均勁度張量則可表示如下：

$$\bar{C}_{ijpq} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_{\frac{\pi}{2}-\phi_0}^{\frac{\pi}{2}+\phi_0} \tilde{C}_{ijpq}(\theta, \phi) \rho(\theta, \phi) \sin \phi d\phi d\theta \quad (7)$$

其中 (θ, ϕ) 代表短纖的長軸方向角， $\tilde{C}_{ijpq}(\theta, \phi)$ 則為對應於長軸在 (θ, ϕ) 方向上短纖維的等效材料係數張量， $\rho(\theta, \phi)$ 為單向隨機分佈纖維密度函數。而密度函數 $\rho(\theta, \phi)$ 需滿足下列條件

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_{\phi_a - \phi_0}^{\phi_a + \phi_0} \rho(\theta, \phi) \sin \phi d\phi d\theta = 1 \quad (8)$$

其中

θ_0 為 θ 方向平均分佈角度

ϕ_a 為 ϕ 方向平均分佈角度

ϕ_0 為 ϕ 方向分佈角度，對稱於 ϕ_a 均勻分佈

當纖維在基材內為理想隨機排列且均勻分佈時， θ 方向分佈角度 θ_0 取 π ， ϕ 方向平均分佈角度 $\phi_a = \pi/2$ ，而 ϕ_0 亦取 $\pi/2$ 。因此，當纖維為均勻分佈時其密度函數 $\rho(\theta, \phi)$ 為 $1/4\pi$ 。將公式(8)利用高斯積分法計算其積分值後，即可求出多向隨機分佈短纖複材之整體平均勁度張量。而所得到的等效材料性質(彈性模數)都具有均向性(isotropic)。亦即；

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{E}_{11} = \bar{E}_{22} = \bar{E}_{33} \\ \bar{G} &= \bar{G}_{12} = \bar{G}_{23} = \bar{G}_{31} \\ \bar{\nu} &= \bar{\nu}_{12} = \bar{\nu}_{21} = \bar{\nu}_{23} = \bar{\nu}_{32} = \bar{\nu}_{13} = \bar{\nu}_{31} \end{aligned} \quad (9)$$

由於隨機分佈鋼纖維混凝土之等效材料性質具均向性，因此直接將所得參數代入有限元素分析軟體之均向性材料組成律模型中，即可進行相關之鋼纖維混凝土結構問題分析。由於轉換計算的過程中除纖維基本材料性質、形狀及所含體積分率外，與採用之纖維的種類無關。故本文中所提出之等效同質體法理論除可用於計算鋼纖維混凝土材料等效彈性模數值之外，其計算方法亦可應用於其他纖維複材彈性模數之計算，如玻璃或聚酯纖維等複合材料。

三、等效材料係數計算實例

本節中將依據前所推導之隨機分佈短纖複材彈性模數計算公式，求出鋼纖維混凝土材料之整體彈性模數值，其計算結果並將與其他方法以及實體實驗所求出之複材整體彈性模數值進行比對，俾驗證本文所提出方法之正確性。本節計算例中所採用之基材混凝土以及鋼纖維相關材料係數，如表 1 所示。其中纖維等效長徑比 $l/d = 100$ ，計算時纖維體積分率的變化範圍為 0.5% ~ 5%。運用前節所推導之等效同質體法數值計算公式，首先將基材及纖維材料係數、纖維體積分率及 Eshelby 張量代入公式(5)，算出 P_{ijab} 後再代回公式(4)，即可求出單一方向分佈纖維複材整體柔度張量 \bar{C}_{mij}^{-1} 。由於此時纖維僅為單向隨機分佈，因此再將其整體材料勁度矩陣代入公式(7)中進行座標轉換及數值積分後，即可算出不同纖維含量下於基材內隨機分佈鋼纖維混凝土整體等效平均彈性模數值(含彈性模數 \bar{E} 、剪力模數 \bar{G} 及波松比 $\bar{\nu}$ 等)，如表 2 所示，鋼纖維混凝土之等效材料性質具有均向性。

表 1. 混凝土及鋼纖維材料模數。

區分	E (GPa)	ν
混凝土基材	20.802	0.2081
鋼纖維	200	0.3

表 2. 鋼纖維混凝土等效材料彈性模數。

鋼纖維體積分率(%)	1	2	3	4	5
彈性模數 \bar{E} (GPa)	21.36	21.92	22.49	23.06	23.63
剪力模數 \bar{G} (GPa)	8.82	9.04	9.27	9.496	9.722
波松比	0.2079	0.2078	0.2077	0.2076	0.2075

為驗證本文所提鋼纖混凝土複材整體彈性模數，計算方法以及所得結果之正確性，其計算結果與複合材料常用之混合法(rule of mixture)[37]和 Ahmad 等[28]所提出的計算公式以及 Williamson [38]針對鋼纖維混凝土進行之標準圓柱試體(150 mm×300 mm)壓力實驗，計算及量測所得複材整體彈性模數 E 值進行比對。

混合法(ROM)[37]的彈性模數計算式，如公式(10)所示，其中 f 為纖維體積分率，

$$E = f E_f + (1-f) E_m \quad (10)$$

E_f 及 E_m 為纖維與基材彈性係數。Ahmad [28] 則應用了 Christensen 和 Waals [27]所推導之彈性模數計算公式：

$$E = E_m + f \frac{3 - 4 \nu_m + 8 \nu_m^2}{15} E_f \quad (11)$$

其中 ν_m 為基材波松比值，經代入表 1 之 ν_m 值後其彈性模數計算式可簡化為：

$$E = E_m + f \times 0.168 \times E_f \quad (12)$$

將實驗結果與公式(10)混合法，公式(12)及本文所計算不同短纖維含量鋼纖維混凝土之等效彈性模數進行比較，如圖 3 所示。其中 Williamson 實驗值曲線係以其所完成於 0%、1.0%、1.5% 以及 2.5% 鋼纖維體積分率下，實驗所得數據進行曲線擬合(curve fitting)結果，以利相關計算數據進行比對。由圖 3 計算結果與實驗量測值的比較中，可觀察到由於混合法僅考慮了纖維體積分率而未將纖維之長徑比及纖維分佈角度的變化納入考慮，因此其所得計算結果遠大於實驗值。Ahmad 所得計算結果則較實驗值為低，而本文所提出之等效同質體法(EIM)數值計算結果僅略低於實驗

值。顯示本文運用等效同質體法所推導之短纖維複材整體彈性模數計算公式之正確性與實用性。除了可以迅速計算出與實驗值相近之鋼纖維混凝土材料等效彈性模數值外，並可供鋼纖維混凝土結構相關問題的基礎研究或有限元素數值模擬分析之用。

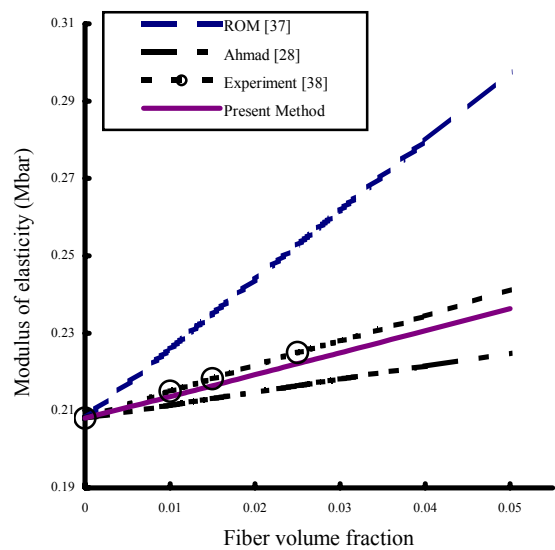


圖 3. 數值計算彈性模數值與實驗值之比較。

四、簡支樑跨中撓度計算實例

為進一步驗證本文所提短纖維複材彈性模數數值計算結果之正確性，本節中將以選定之鋼纖維混凝土三分點載重簡支樑為例(如圖 4 所示)，先應用等效同質體法推導之計算公式算出鋼纖維混凝土樑等效彈性模數值，再將其代入解析解公式中，進行鋼纖維混凝土簡支樑跨中撓度計算。其計算所得跨中撓度值將與實驗量測數據進行比對，俾驗證前述彈性係數值計算結果之正確性。

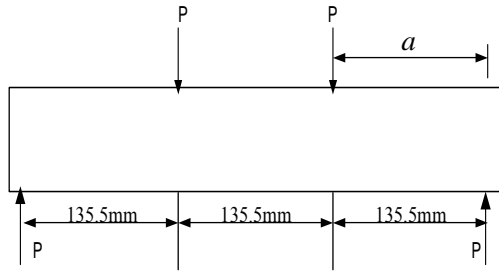


圖 4. 三分點載重簡支樑跨中示意图。

O'Leary [4] 實驗所採用之 100mm×100 mm×500 mm 鋼纖維混凝土樑，其基材混凝土抗壓強度為 60.7MPa，樑中添加了體積含量 1.6%，直徑 0.38 mm 長度 25 mm 之鋼纖維，纖維長徑比 (l/d) 65。本例中採用基材混凝土之抗壓強度為 60.7MPa 依據 CEB [39] 高強度混凝土彈性係數經驗公式 $E = 10 (f'_c + 8)^{1/3}$ 計算得到之混凝土基材彈性係數 E 值為 40.956GPa，波松比取 0.11 [40]，而鋼纖維彈性係數則為 200GPa，波松比 0.3。運用等效同質體法推導之計算公式算出短纖複材整體彈性模數 \bar{E} 值為 42.129GPa，將其代入三分點加載簡支樑跨中撓度 δ_c 解析解公式[41]

$$\delta_c = Pa/24\bar{E}I(3L^2 - 4a^2) \quad (13)$$

即可得出不同荷載狀態下，鋼纖維混凝土簡支樑跨中撓度值。其中 P 為樑上所加荷載， L 為樑的總長度， a 為三分點加載狀態下荷載 P 與支撐點間之距離， I 為纖維混凝土樑慣性距(moment of inertia)，詳如圖 4 所示。

其計算結果與 O'Leary [4] 實驗量測所得跨中撓度值比較如表 3 及圖 5 所示。由圖中載重與跨中撓度曲線之比較可見，解析解計算所得結果與實驗量測值十分接近。其中虛線部份係 60.7 MPa 純混凝土樑於相同荷載下之跨中撓度曲線，與鋼纖維混凝土樑相較由於少了鋼纖維的加勁故其跨中撓度值在相同荷載下，均

略為高於鋼纖維混凝土樑。上述所得比較結果進一步驗證了本文所提等效同質體法推導之鋼纖維複材整體彈性模數數值計算結果之正確性。

表 3. 三分點載重簡支樑跨中撓度值(mm)。

P (kN)	EIM(鋼纖維混凝土)	實驗值(鋼纖維混凝土)[4]	EIM(純混凝土)	實驗值(鋼纖維混凝土)[4]
1	0.0067	0.0065	0.0069	*
2	0.0135	0.013	0.0139	*
3	0.0203	0.02	0.0209	0.021
4	0.0271	0.026	0.0279	*
5	0.0339	0.034	0.0349	0.03
6	0.0407	0.039	0.0419	0.0375
7	0.0475	0.046	0.0488	0.044
8	0.0543	0.054	0.0558	*

附註：* 表該實驗[4]中未提供相關數據。

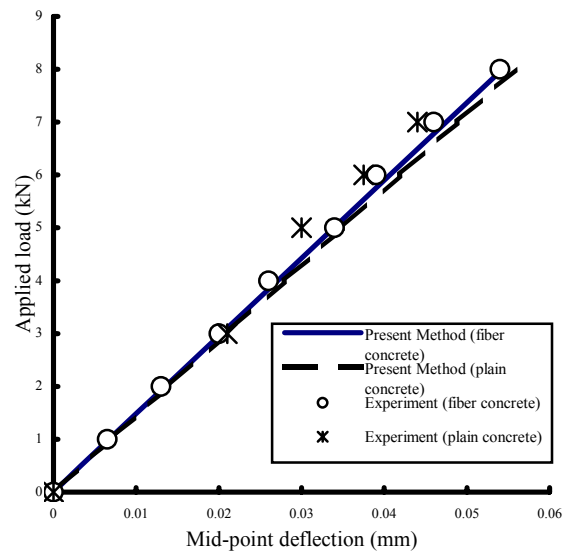


圖 5. 簡支樑跨中撓度解析解計算值與實驗值之比較。

五、結論

雖然鋼纖維混凝土是一種性質相當複雜

的複合材料體，但由於其整體材料兼具了鋼纖維與混凝土兩種材料的優點，因此被期許為機場跑(滑)道、軍事防護結構(掩體、防爆牆)、核能電廠圍阻體以及相關民生公共工程用以抗磨損、防爆震(撞擊)之良好建材。然而影響鋼纖維混凝土材料基本力學性質的因素很多，舉凡鋼纖維的幾何形狀、力學強度、加工方法、體積分率以及混凝土基材的配比、抗壓強度等，對於鋼纖維混凝土材料的基本力學性質都會生不同程度的影響。故於鋼纖維混凝土材料的分析、設計以及實際工程應用的過程中，對於其基本材料性質的充分瞭解則是非常重要的課題之一。

本文中應用了等效同質體法(Equivalent Inclusion Method)理論，推導並計算鋼纖維混凝土複材等效整體彈性模數值。其彈性模數計算結果與 Williamson 鋼纖維混凝土材料實驗量測數據相符。此外在鋼纖維混凝土三分點載重簡支樑的跨中撓度計算例中，以本文方法計算所得鋼纖維混凝土樑之等效彈性模數 \bar{E} 值代入解析解公式，計算所得之簡支樑跨中撓度值與 O'Leary 實驗量測結果亦十分接近，驗證了以本文所提鋼纖維混凝土等效複材整體彈性模數計算結果應用在結構分析上之正確性及實用性。對於較複雜的鋼纖維混凝土結構問題分析，可將本文方法計算所得之等效彈性模數輸入有限元素程式的材料組成律模式後，即可進行數值模擬分析，以簡化相關問題的分析程序。

參考文獻

- [1] 楊錦懷，“結構新材料—纖維混凝土”，結構工程，第三卷第二期，第 105-112 頁，1988。
- [2] 宋佩瑄，纖維混凝土實務，現代營建雜誌社編印，1991。
- [3] Velazco, G., Visalvanich, K., and Shah, S. P., “Fracture Behavior and Analysis of Fiber Reinforced Concrete Beams,” *Cement and Concrete Research*, Vol. 10, No. 1, pp. 41-51, 1980.
- [4] O'Leary, D. C., Dave, N. J., and Saunders, J., “Steel Fibers in Partially Prestressed Composite Concrete Beams,” *An International Symposium: Fiber Reinforced Concrete*, ACI 544, SP 44-27, pp. 477-495, 1973.
- [5] Swamy, R. N., “The Interfacial Bond Stress in Steel Fiber Cement Composites,” *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, No. 5, pp. 641-650, 1976.
- [6] Hughes, B. P. “Load-Deflection Curves for Fibre-Reinforced Concrete Beams in Flexure,” *Magazine of Concrete Research*, Vol. 29, No. 101, pp. 199-206, 1977.
- [7] Mindess, S. and Bentur, A., “Concrete Beams Reinforced with Conventional Steel Bars and Steel Fibres: Properties in Static Loading,” *The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, Vol. 5, No. 3, pp. 199-202, 1983.
- [8] Pakotiprapha, B., Pama, R. P., and Lee, S. L., “Mechanical Properties of Cement Mortar with Randomly Oriented Short Steel Wires,” *Magazine of Concrete Research*, Vol. 26, No. 86, pp. 3-15, 1974.
- [9] Lim, T. Y., Paramasivam, P., and Lee, S. L., “Bending Behavior of Steel-Fiber Concrete Beams,” *ACI Structural Journal*, 84-S54, pp. 524-536, 1987.
- [10] Henager, C. H. and Doherty, T. J., “Analysis of Reinforced Fibrous Concrete Beams,” *Journal of the Structural Division*, Vol. 102, (ST1), pp. 177-188, 1976.
- [11] Nataraja, M. C. and Gupta, A. P., “Stress-Strain Curves for Steel-Fiber Reinforced Concrete Under Compression,” *Cement and Concrete Composites*, Vol. 21, No. 5-6, pp. 383-390, 1999.
- [12] Laws, V., “The Efficiency of Fibrous Reinforcement of Brittle Matrices,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 4, pp. 1737-1746, 1971.
- [13] Surendra, P. S. and Rangan, B. V., “Fiber Reinforced Concrete Properties,” *ACI Journal*, No. 68-14, pp. 126-135, 1971.
- [14] Tanigawa, Y., Yamada, K., Hatanaka, S., and Mori, H., “A Simple Constitutive Model of Steel Fibre Reinforced Concrete,” *The*

- International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, Vol. 5, No. 2, pp. 87-96, 1983.
- [15] Li, V. C. and Liang, E., "Fracture Processes in Concrete and Fiber Reinforced Cementitious Composites," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 112, No. 6, pp.566-586, 1986.
- [16] 賴榮森, 纖維混凝土之發展與應用, 台灣營建研究中心研究報告, 1983。
- [17] 陳振川編著, 纖維混凝土發展與應用, 台灣營建研究院研討會論文集, 1987。
- [28] 柴希文編著, 纖維混凝土在工程上的應用與發展, 台灣營建研究院研討會論文集, 1998。
- [19] 楊錦懷, 纖維加強水泥複合材料之乾縮、黏彈與破裂行為研究, 國立台灣大學土木工程研究所博士論文, 1989。
- [20] 陳振川、楊鎮安, "高流動性鋼纖維高性能混凝土基本力學性質探討", 纖維混凝土發展與應用研討會論文集, 第 45-75 頁, 1997。
- [21] Hashin, Z. and Shtrikman, S., "A Variational Approach to The Theory of The Elastic Behaviour of Multiphase Materials," J. Mech. Phys., Vol. 11, pp. 127-140, 1963.
- [22] Hashin, Z. and Rosen, B. W., "The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials," Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, pp. 223-232, 1964.
- [23] Whitney, J. M. and Rilet, M. B., "Elastic Properties of Fiber Reinforced Composite Materials," AIAA Journal, Vol. 4, No. 9, pp. 1537-1542, 1966.
- [24] Nielsen, L. E. and Chen, P. E., "Young's Modulus of Composites Filled with Randomly Oriented Fibers," Journal of Materials, Vol. 3, No. 2, pp. 352-358, 1968.
- [25] Chamis, C. C. and Sendeckyj, G. P., "Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites," Journal of composite Materials, Vol. 2, No. 3, pp. 332-358, 1968.
- [26] Halpin, J. C., "Stiffness and Expansion Estimates for Oriented Short Fiber Composites," Journal of composite Materials, Vol. 3, pp. 732-735, 1969.
- [27] Christensen, R. M. and Waals, F. M., "Effective Stiffness of Randomly Oriented Fibre Composites," Journal of composite Materials, Vol. 6, pp. 518-535, 1972.
- [28] Ahmad, H. and Lagoudas, D. C., "Effective Elastic Properties of Fiber-Reinforced Concrete with Random Fibers," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, No. 12, pp. 2931-2939, 1991.
- [29] Mura, T., Micromechanics of Defects in Solids, 2nd Edition, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1987.
- [30] Huang, J. H., "Effective Electroelastic Moduli of Multiphase Piezoelectric Composites," Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Vol. 17, No. 2, pp. 111-121, 1996.
- [31] Huang, J. H., "Some Closed-Form Solutions for Effective Moduli of Composites Containing Randomly Oriented Short Fibers," Materials Science and Engineering A315, pp. 11-20, 2001.
- [32] Chao, L. P. and Huang, J. H., "Prediction of Elastic Moduli of Porous Materials with Equivalent Inclusion Method," Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 18, No. 7, pp. 592-605, 1999.
- [33] Chao, L. P., Huang, J. H., and Huang, Y. S., "The Influence of Aspect Ratio of Voids on the Effective Elastic Moduli of Foamed Metals," Journal of Composite Materials, Vol. 33, No. 21, pp. 2002-2017, 1999.
- [34] Eshelby, J. D., "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems," Proceedings of the Royal Society of London, A241, pp. 376-396, 1957.
- [35] Eshelby, J. D., "The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion," Proceedings of the Royal Society of London, A252, pp.561-569, 1959.
- [36] Mori, T. and Tanaka, K., "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusion," ACTA Metallurgica, Vol. 21, pp. 571-574, 1973.
- [37] Tsai, S. W. and Hahn, H. T., Introduction to Composite Materials, Technomic Publishing Co., Inc. Westport, 1980.
- [38] Williamson, G. R., "The Effect of Steel Fibers on the Compressive Strength of Concrete," Int. Symp. on Fiber Reinforced Concrete, American Concrete Institute, SP 44-11, pp. 195-207, 1974.
- [39] 曹國龍, 高性能混凝土破裂性質之探討, 國立台灣工業技術學院營建工程技術研

究所碩士論文，1997。

- [40] Buckley, E. L. and Everard, N. J., Int. Symp. on Fiber Reinforced Concrete, American Concrete Institute, SP 44-9, pp. 163-175, 1974.
- [41] Gere, J. M. and Timoshenko, S. P., Mechanics of Materials, Fourth SI Edition, Stanley Thorne (Publishers) Ltd, London, 1999.