

## 飛彈自動導航之輸出回授增益排程控制

蔣豐隆\* 陳邦家\*\* 張永華\*\*\* 蔡渙良\*\*\*\*

\*空軍軍官學校  
\*\*\*長庚大學電機系

\*\*空軍航空技術學院飛機工程系  
\*\*\*\*國防大學中正理工學院電機系

### 摘要

本文主要探討飛彈動態增益排程自動導航設計，首先非線性的飛彈動態系統經由線性參數變換，轉換成等效之線性參數變化系統，轉換過程中並未將任何非線性項予以省略不計，得以避免因為線性化所產生的誤差。增益排程控制可以有效因應外擾或雜訊所導致系統參數變化的影響，受控系統可針對所遭遇的狀況來選擇最適合的設定排程，以達到最終的目的，因此特別適用於動態特性隨操作狀況改變的受控系統。本文運用線性矩陣不等式方法分別設計輸出回授固定階數真分型控制器、比例-積分型式控制器及全階控制器，以抑制外界干擾之影響，並確保系統之強健性及穩定性。

**關鍵字：**增益排程、線性參數變換、線性矩陣不等式、飛彈自動導航

## Output-Feedback Gain-Scheduled Control for Missile Autopilot

Feng-Lung Chiang\*, Pang-Chia Chen\*\*, Yeong-Hwa Chang\*\*\*  
and Huan-Liang Tsai\*\*\*\*

\*Air Force Academy

\*\*Department of Aircraft Engineering, Air Force Institute of Technology

\*\*\*Department of Electrical Engineering, Chang Gung University

\*\*\*\*Department of Electrical Engineering, Chung Cheng Institute of Technology, National Defense University

### ABSTRACT

This paper mainly investigates the gain-scheduled autopilot design for missile longitudinal dynamics. The nonlinear missile dynamics are transformed to an equivalent linear parameter varying system via a linear parameter varying transformation. There is no ignored nonlinear term such that the linearization errors can be avoided. Gain-scheduled control can effectively cope with the influence resulted from external disturbance and noise. According to the operational conditions, gain-scheduled controlled system is able to select the suitable gain scheduling process to achieve the desired goal. In this paper, the addressed controllers include fixed-order controller, PI controller and full-order controller. The external disturbance is considered, where the gain-scheduled robust controllers are derived by employing certain optimization problems in the form of linear matrix inequalities.

**Keywords:** gain-scheduled, linear parameter varying, linear matrix inequality, missile autopilot

文稿收件日期 92.9.15; 文稿修正後接受日期 93.3.8.

Manuscript received September 15, 2003; revised March 8, 2004.

## 一、前言

傳統飛行器之控制器設計方法，大多針對飛行路徑或飛行狀況選定特定的操作點，以小擾動方法推導出系統的線性模型並據以設計控制器。控制增益排程是一種源自於飛行控制系統的設計方法其特色在於事先根據系統數個操作點設計，在實際操作時則根據系統瞬間的操作點，即時切換或連續調變預先設計的控制器[1]。藉著此種以線上調變的方式所選定的控制器，可滿足因模型不確定性的強健性需求，同時有效的提昇系統的性能。增益排程設計法可以有效因應外在環境或外擾影響而導致參數變化對系統的影響，系統可針對所遭遇的狀況來選擇最適合的設定排程，以達到最終的目的；因此特別適用於動態特性隨操作狀況改變的受控體。

系統通常受一些無法明確掌握之外來干擾，如風力、電磁波干擾或迴饋控制之量測雜訊干擾，都會造成系統的不穩定現象，所以大部分的系統都需要設計控制器，控制器的設計目標源自兩個基本上的需求：穩定性與性能，控制工程師往往面臨既要追求控制器的性能又要兼顧對於不確定性的強健性，所以一個好的控制器本身必須是一個均衡的控制器。在控制器設計上均需針對系統動態行為特性以一數學模型表示，考量高頻時系統乘積不確定性及低頻外界輸入干擾等因素，為提昇系統抗干擾的能力，多採用強健控制理論來設計系統所需的控制器。

本文所設計的控制器包含輸出回授之固定階數控制器、比例-積分（Proportional Integral, PI）控制器及全階數控制器，並利用線性矩陣不等式（Linear Matrix Inequality, LMI）[2]的方法求解標準的 $H_\infty$ 控制問題，其

均將模型轉化成線性模式，再配合其他引理，如蕭爾互補定理（Schur complement）、實界引理（bounded real lemma）[2, 6, 7, 8]等以形成不同型式的線性矩陣不等式組，使得閉環系統轉移函數之 $H_\infty$ 範數（norm）小於一個特定值。綜合前述，本文使用線性矩陣不等式設計強健增益排程控制器，期望抑制最壞外界干擾影響，以確保控制器之強健性。

本文共分五節，第二節為飛彈動態與擴增受控系統，利用線性參數變化（Linear Parameter Varying, LPV），將非線性的飛彈模型轉換成線性參數變化系統及飛彈擴增系統建立。第三節為運用 $H_\infty$ 控制理論及極點配置法則，分別設計輸出回授固定階數真分型控制器、比例-積分型式控制器及全階控制器，藉以分析不同設計法則間之優略點。第四節為控制器實現與系統模擬，設計出多個不同攻角之控制器藉以形成增益排程控制器組，運用增益排程控制器組將系統效能極盡展現，並探討不同控制器對系統性能的影響及外在干擾的抑制效果。第五節為結論。

## 二、飛彈動態與擴增受控系統

假設非線性系統之動態方程式表示為

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ h \end{bmatrix} = f(z) + A(z) \cdot \begin{bmatrix} z \\ h \end{bmatrix} + B(z) \cdot u \quad (1)$$

其中 $u$ 為系統輸入， $z$ 為系統變化參數。對本系統而言，系統的非線性項 $f(z)$ 僅為輸出變數的函數。假設存在有連續可微分函數 $h_{eq}(z)$ 及 $u_{eq}(z)$ ，使得

$$0 = f(z) + A(z) \cdot \begin{bmatrix} z \\ h_{eq}(z) \end{bmatrix} + B(z) \cdot u_{eq}(z) \quad (2)$$

則可求得以輸出變數 $z$ 為自變數的一組平衡

狀態函數  $[h_{eq}(z), u_{eq}(z)]$ 。將系統矩陣  $A(z)$  和輸入矩陣  $B(z)$ ，依  $z$  和  $h$  之維度表示為

$$A(z) = \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{bmatrix} \quad B(z) = \begin{bmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{bmatrix}$$

當求得系統的平衡狀態  $[h_{eq}(z), u_{eq}(z)]$  時，對系統進行座標轉換，將其以距平衡值之分量表示： $h \Rightarrow [h - h_{eq}(z)]$  及  $u \Rightarrow [u - u_{eq}(z)]$ ，則所討論之非線性系統動態方程式可改寫為如下之 LPV 之形式

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ h - h_{eq}(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & A_{12}(z) \\ 0 & A_{22}(z) - D(h_{eq}(z)) \cdot A_{12}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ h - h_{eq}(z) \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) - D(h_{eq}(z)) \cdot B_1(z) \end{bmatrix} [u - u_{eq}(z)] \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $[u - u_{eq}(z)]$  為系統由非線性項所產生偏離平衡狀態的誤差值， $D$  代表對  $z$  的微分符號。此時我們已將原始非線性動態系統轉換成如 (3) 式形式之線性參數變化 (LPV) 系統。

在傳統的增益排程控制器設計中，需針對系統的動態選定一系列的操作點，然後以小擾動方法推導出系統在操作點上的線性化模型，並依此線性化模型設計控制器，此法在獲得線性化模型的過程中將泰勒展開式高次項忽略不計，因此無法避免誤差的產生，尤其當系統運動範圍逐漸遠離所假定的工作點時，其誤差亦逐漸增大。本文所採用的線性參數變化轉換方法，將系統從原來的非線性動態系統轉換為線性參數變化系統型式，並未將非線性項予以省略不計。此時系統的動態特性依排程變數  $z$  的瞬間值而改變；當排程變數  $z$  得知時，系統亦為已知，因此可選定一組固定的  $z$  值，利用線性控制器設計法則進行控制器設

計，如此達成非線性控制的目的，而且避免因為線性化所產生的誤差，具有線性控制器設計最佳化與強健性之優點。

本文之受控體（飛彈）是一非線性動態系統，非線性動態系統的控制問題，一直是許多學者所致力於研究的課題，圖1為飛彈之力學示意圖[3, 4]。飛彈的縱向動態方程式可描述如下[5]：

$$\dot{\alpha} = f \frac{g \cos(\alpha)}{j_w \cdot v} Z_f + q \quad \dot{q} = \frac{f \cdot m}{I_{yy}} \quad (4)$$

其中  $m = C_m \cdot Q \cdot s \cdot d$ ， $Z_f = C_z \cdot Q \cdot s$ ， $C_m, C_z$  分別為俯仰力矩及推力之係數，可近似表示為

$$C_m = \phi_m(\alpha) + b_m \delta, C_z = \phi_z(\alpha) + b_z \delta$$

其中

$$b_m = -0.206, b_z = -0.034$$

$$\phi_m(\alpha) = 0.000215\alpha^3 - 0.00195\alpha|\alpha| + 0.051\alpha$$

$$\phi_z(\alpha) = 0.000103\alpha^3 - 0.00945\alpha|\alpha| - 0.170\alpha$$

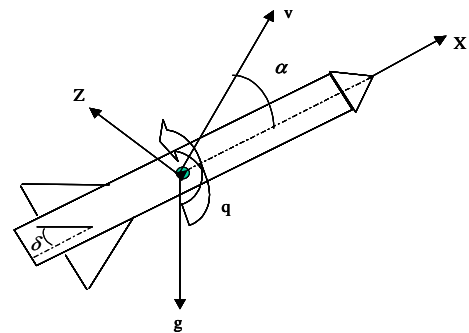


圖1. 飛彈之力學示意圖。

將(4)式重新改寫為，

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f \cdot g \cdot Q \cdot s \cdot \cos(\frac{\alpha}{f})}{j_w v} \phi_z(\alpha) \\ \frac{f \cdot Q \cdot s \cdot d}{I_{yy}} \phi_m(\alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{f \cdot g \cdot Q \cdot s \cdot b_z \cdot \cos(\frac{\alpha}{f})}{j_w v} \\ \frac{f \cdot Q \cdot s \cdot d \cdot b_m}{I_{yy}} \end{bmatrix} \delta \quad (5)$$

其中 $\alpha$ 與 $q$ 是狀態函數、 $\delta$ 是輸入，攻角 $\alpha$ 為變化參數，依照(3)式的型式，就可以求出飛彈的線性參數變化系統動態，

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha \\ q - q_{eq}(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -Dq_{eq}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q - q_{eq}(\alpha) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{f \cdot g \cdot Q \cdot s \cdot b_z \cdot \cos(\frac{\alpha}{f})}{j_w v} \\ \frac{f \cdot Q \cdot s \cdot d \cdot b_m}{I_{yy}} - Dq_{eq}(\alpha) \cdot \frac{f \cdot g \cdot Q \cdot s \cdot b_z \cdot \cos(\frac{\alpha}{f})}{j_w v} \end{bmatrix} [\delta - \delta_{eq}(\alpha)] \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_{eq}(\alpha) &= \frac{-\frac{f \cdot Q \cdot s \cdot d}{I_{yy}} \cdot \phi_m(\alpha)}{\frac{f \cdot Q \cdot s \cdot d}{I_{yy}} \cdot b_m} = \frac{-\phi_m(\alpha)}{b_m} \\ q_{eq}(\alpha) &= \frac{-f \cdot g \cdot Q \cdot s \cdot \cos(\frac{\alpha}{f})}{j_w v} [\phi_z(\alpha) - \frac{b_z}{b_m} \phi_m(\alpha)] \end{aligned}$$

本文之自動導航設計以法線加速度 (normal acceleration) 為控制指標，其定義為推力與重力之比值，如下式

$$\eta = \frac{Z_f}{j_w} = \frac{C_z \cdot Q \cdot s}{j_w} = \frac{[\phi_z(\alpha) + b_z \delta] Q \cdot s}{j_w} \quad (7)$$

一但下達方向舵控制命令 $\delta_c$ ，我們希望法線加速度 $\eta$ 能追隨到命令法線加速度 $\eta_c$ ，此程序可以幫助我們了解誤差產生與否及其大小，假如沒有誤差產生，表示在下達命令之後，所需之響應皆能達到，因此就沒有誤差訊號送到控制器，控制器不用作修正或補償的動作；如有誤差存在，可藉由誤差訊號的量測，來調整所下的命令進而減少誤差，藉以達到系統需求。為將非線性之法線加速度表示成線性特性，故將(7)示寫成(8)式

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_{eq}(\alpha) + (\eta - \eta_{eq}(\alpha)) \\ &= (\phi_z(\alpha) + b_z \delta_{eq}(\alpha)) \frac{Q \cdot s}{j_w} + \frac{Q \cdot s \cdot b_z}{j_w} (\delta - \delta_{eq}(\alpha)) \\ &= (\phi_z(\alpha) - \phi_m(\alpha) \frac{b_z}{b_m}) \frac{Q \cdot s}{j_w} + \frac{Q \cdot s \cdot b_z}{j_w} (\delta - \delta_{eq}(\alpha)) \end{aligned} \quad (8)$$

其中由給定的參數值可線性化近似得到[5]

$$(\phi_z(\alpha) - \phi_m(\alpha) \frac{b_z}{b_m}) \frac{Q \cdot s}{j_w} \approx -1.54 \alpha$$

因此受控之非線性法線加速度可表示為

$$\begin{aligned} y_m &:= \eta \approx -1.54 \alpha + \frac{Q \cdot s \cdot b_z}{j_w} [\delta - \delta_{eq}(\alpha)] \\ &= [-1.54 \quad 0] x_m + \frac{Q \cdot s \cdot b_z}{j_w} [\delta - \delta_{eq}(\alpha)] \end{aligned}$$

為了要得到更多的量測資訊，我們增加了量測訊號 $(\alpha, q - q_{eq}(\alpha))$ ，其中 $q - q_{eq}(\alpha)$ 為攻角 $\alpha$ 的函數，而攻角 $\alpha$ 可由攻角指示器量測得知，進而可計算出 $(q - q_{eq}(\alpha))$ 之數據，如此對於訊號擷取、誤差判斷及模擬上都有極大的助益，所以飛彈的輸出狀態可以重新寫成

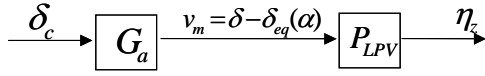


圖 2. 致動器與飛彈之輸出與輸入關係圖。

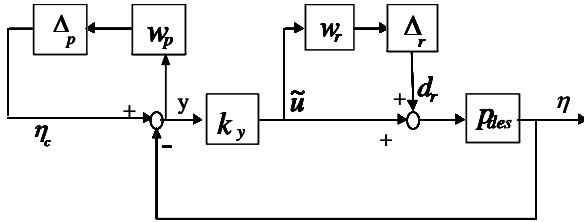


圖 3. 含權重函數之系統組織架構圖。

$$\begin{bmatrix} y_m \\ \alpha \\ q - q_{eq}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.54 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q - q_{eq}(\alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q.s.b_z \\ j_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\delta - \delta_{eq}(\alpha)] \quad (9)$$

同時假設致動器轉移函數為[5]

$$v_m = \frac{w_a^2}{s^2 + 1.4w_a s + w_a^2} \delta_c \quad (10)$$

可將其表示為狀態空間表示式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_m \\ \dot{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_a^2 & -1.4w_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ \dot{v}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_a^2 \end{bmatrix} \delta_c$$

$$:= A_a x_a + B_a \delta_c \quad (11)$$

$$y_a = v_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ \dot{v}_m \end{bmatrix} := C_a x_a \quad (12)$$

從圖2可知致動器輸出與飛彈輸入之關係

$$\begin{aligned} y_a &= v_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_a = C_a x_a \\ &= \delta - \delta_{eq}(\alpha) \\ &= u_m \end{aligned} \quad (13)$$

將具有線性參數變化系統型式的飛彈動態方程式(6)與致動器動態方程式(11)相結合，可得

$$\begin{cases} \dot{x}_m = A_m(\alpha)x_m + B_m(\alpha)u_m \\ y_m = C_m x_m + D_m u_m \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -Dq_{eq}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} \frac{f.g.Q.s.b_z \cdot \cos(\frac{\alpha}{f})}{wv} & 0 \\ \frac{f.g.Q.s.d.b_m - Dq_{eq}(\alpha)}{I_{yy}} & \frac{f.g.Q.s.b_z \cdot \cos(\frac{\alpha}{f})}{wv} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} -1.54 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_m = \begin{bmatrix} \frac{Q.s.b_z}{j_w} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

從第(12)及(13)式可以求得飛彈動態方程式與致動器動態方程式相結合的新狀態方程式

$$P_{des} : \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_m \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m(\alpha) & B_m(\alpha).C_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_a \end{bmatrix} \delta_c \\ := A_d x_d + B_d (u + d_r) \\ y_m = \begin{bmatrix} C_m & D_m C_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ x_a \end{bmatrix} := C_d x_d \end{cases} \quad (15)$$

一系統若加上外擾，則以此系統所設計之控制器就具有強健性，外擾是來自外在環境的干擾，例如以飛彈而言，可能是陣風或擾流，以橋樑而言，則是震動力等，外擾是無法事先估計其值，只能當場做立即的辨識，控制系統在外擾的突然作用之下，操作性能及響應會立即降低，若外擾無法立即排除或做有效的處理，則性能或響應會一直惡化下去；而外擾的排除或控制即是強健性控制的目的之一，簡而言之，就是要使外擾對系統的輸出之影響減到最小。圖 3 為含權重函數之系統組織架構

圖，系統不確定權重函數( $w_r$ )及性能響應權重函數( $w_p$ )分別敘述如下，其中 $\Delta_r$ 及 $\Delta_p$ 為乘積性(multiplicative)的非結構不確定項，其沒有單位，它們代表隨著頻率 $w$ 而變化的誤差百分比。我們所選擇的外界干擾抑制控制的權重函數時，系統階數是控制器的階數配合控制對象的階數與權重函數的階數，因此權重函數在滿足規格的範圍內，盡量選擇低階的較好。圖4表示系統不確定權重函數之頻率響應，系統不確定權重函數之轉移函數為

$$w_r = \frac{s+100}{s+1000} \quad (16)$$

第(16)式轉移函數可以線性轉換成狀態方程式，表示方式如下

$$w_r : \begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u \\ e_r = C_r x_r + D_r u \end{cases} \quad (17)$$

性能響應權重函數之轉移函數為

$$w_p = \frac{0.5s+10}{2.5s+2.5} \quad (18)$$

第(18)式轉移函數可以線性轉換成狀態方程式，表示方式如下

$$w_p : \begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p (\eta_c - C_d x_d) \\ e_p = C_p x_p + D_p (\eta_c - C_d x_d) \end{cases} \quad (19)$$

圖5表示性能響應權重函數之頻率響應。選定系統不確定權重函數( $w_r$ )及性能響應權重函數( $w_p$ )之後，再與系統 $p_{des}$ 相結合形成擴增系統，其狀態方程式表示如后：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_d \\ x_p \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & 0 & 0 \\ -B_p C_d & A_p & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_p \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \\ B_r \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & B_d \\ B_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_c \\ d_r \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$y = \begin{bmatrix} -C_d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_p \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_c \\ d_r \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} e_p \\ e_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_p C_p & C_p & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_p \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_r \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} D_p \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_c \\ d_r \end{bmatrix} \quad (22)$$

為方便了解、辨識及後續系統計算所需，我們將(20)式至(22)式重新改寫成下式

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\alpha)x + B_x u + B_w w \\ y = C_y x + D_{yw} w \\ z = C_z x + D_{zu} u + D_{zw} w \end{cases} \quad (23)$$

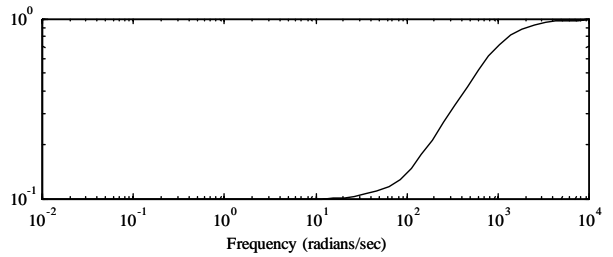


圖4. 系統不確定權重函數之頻率響應。

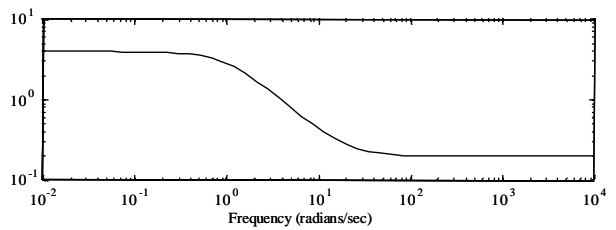


圖5. 性能響應權重函數之頻率響應。

### 三、 $H_\infty$ 輸出回授控制器設計

本節的目的，在於應用輸出回授的方法設計 $H_\infty$ 控制器，期望抑制外界干擾影響，以確保控制器之強健性；所設計之控制器型式計固定階數真分型(proper)控制器、比例-積分控制器、全階數控制器三種，分別詳述如下：

### 3.1 固定階數真分型控制器設計

假設控制器表示式如下所示：

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \quad (24)$$

$$u = C_k x_k + D_k y \quad (25)$$

將以上二式表示為  $\tilde{u} = \Omega \tilde{y}$ ，其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \quad (26)$$

再將擴增系統(23)與(24)式及(25)式之控制器連結形成一完整的控制系統架構，如圖3。系統的狀態方程如下所示：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 & B_x \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \end{bmatrix} \\ &:= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B}_w w + \tilde{B} \tilde{u} \end{aligned} \quad (27)$$

$$z = \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + D_{zw} w + \begin{bmatrix} 0 & D_{zu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &:= \tilde{C}_z \tilde{x} + D_{zw} w + \tilde{D}_{zu} \tilde{u} \\ \tilde{y} = \begin{bmatrix} x_k \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{bmatrix} w \end{aligned} \quad (29)$$

$$:= \tilde{C}_y \tilde{x} + \tilde{D}_{yw} w$$

將(26)式  $\tilde{u} = \Omega \tilde{y}$  中之  $\tilde{y}$  用(29)式代替，

$$\tilde{u} = \Omega \tilde{y} = \Omega (\tilde{C}_y \tilde{x} + \tilde{D}_{yw} w) = \Omega \tilde{C}_y \tilde{x} + \Omega \tilde{D}_{yw} w \quad (30)$$

將(30)式代入(27)式及(29)式中，可以得到具有命令追蹤及外擾調適的功能之輸出回授的閉迴路控制系統，表示如下：

$$\begin{bmatrix} (\hat{A} + \tilde{B} \Omega \tilde{C}_y)^T P + P(\hat{A} + \tilde{B} \Omega \tilde{C}_y) & P(\tilde{B}_w + \tilde{B} \Omega \tilde{D}_{yw}) & (\tilde{C}_z + D_{zu} \Omega \tilde{C}_y)^T \\ (\tilde{B}_w + \tilde{B} \Omega \tilde{D}_{yw})^T P & -\gamma I & (D_{zw} + D_{zu} \Omega \tilde{D}_{yw})^T \\ \tilde{C}_z + D_{zu} \Omega \tilde{C}_y & D_{zw} + D_{zu} \Omega \tilde{D}_{yw} & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B} \Omega \tilde{C}_y) \tilde{x} + (\tilde{B}_w + \tilde{B} \Omega \tilde{D}_{yw}) w \quad (31)$$

$$:= A_{cl} \tilde{x} + B_{cl} w$$

$$z = (\tilde{C}_z + \tilde{D}_{zu} \Omega \tilde{C}_y) \tilde{x} + (D_{zw} + \tilde{D}_{zu} \Omega \tilde{D}_{yw}) w \quad (32)$$

$$:= C_{cl} \tilde{x} + D_{cl} w$$

其中

$$A_{cl} = \tilde{A} + \tilde{B} \Omega \tilde{C}_y = \begin{bmatrix} A + B_x D_k C_y & B_x C_k \\ B_k C_y & A_k \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$B_{cl} = \tilde{B}_w + \tilde{B} \Omega \tilde{D}_{yw} = \begin{bmatrix} B_w + B_x D_k D_{yw} \\ B_k D_{yw} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C_{cl} = \tilde{C}_z + D_{zu} \Omega \tilde{C}_y = \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_k C_y & D_{zu} C_k \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$D_{cl} = D_{zw} + \tilde{D}_{zu} \Omega \tilde{D}_{yw} = (D_{zw} + D_{zu} D_k D_{yw}) \quad (36)$$

令  $\hat{A}_{cl} = A_{cl} + \beta I$ ，其用意為使矩陣  $\hat{A}_{cl}$  的所有特徵值均位於左半平面，且距離虛軸至少有  $\beta$  的距離，更可確保矩陣  $\hat{A}_{cl}$  的穩定，如此即可在相對穩定度  $\beta$  下設計輸出回授控制器。引用實界引理，若存在一正定之對稱矩陣  $P$ ，滿足下列線性矩陣不等式，

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{cl}^T P + P \hat{A}_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

$$\text{則 } \|D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} B_{cl}\|_{\infty} < \gamma$$

將(33)式至(36)式代入(37)式中可得

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \tilde{B}_w & \tilde{C}_{z,i}^T \\ \tilde{B}_w^T P & -\gamma I & D_{zw}^T \\ \tilde{C}_z & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_y^T \\ \tilde{D}_{yw}^T \\ \phi \end{bmatrix} \Omega^T \begin{bmatrix} \tilde{B}^T P & \phi & D_{zu}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \tilde{B} \\ \phi \\ D_{zu} \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \tilde{C}_y & \tilde{D}_{yw} & \phi \end{bmatrix} < 0 \quad (38)$$

在(38)式中存在兩個變數  $P$  及  $\Omega$ ，這兩個變數都在同一個項次內，使得(38)式形成雙線性矩陣不等式(bilinear matrix inequality, BMI)的問題。假設存在一正定實對稱矩陣  $P$  及矩陣  $\Omega$  如(38)式，可將(38)式改寫成(39)式及(40)式[2]，進而求出變數  $P$  及  $\Omega$ ，

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_y^T \\ \tilde{D}_{yw}^T \\ \phi \end{bmatrix}^{\perp T} \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \tilde{B}_w & \tilde{C}_z^T \\ \tilde{B}_w^T P & -\gamma I & D_{zw}^T \\ \tilde{C}_z & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_y^T \\ \tilde{D}_{yw}^T \\ \phi \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} P \tilde{B} \\ \phi \\ D_{zu} \end{bmatrix}^{\perp T} \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \tilde{B}_w & \tilde{C}_z^T \\ \tilde{B}_w^T P & -\gamma I & D_{zw}^T \\ \tilde{C}_z & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \tilde{B} \\ \phi \\ D_{zu} \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

對所有  $P$  而言

在(40)式中， $\begin{bmatrix} P \tilde{B} \\ \phi \\ D_{zu} \end{bmatrix}^{\perp}$  是外因子函數(outer factor

function)，但含有變數  $P$ 。將(40)式重新整理成(41)式，表示如下：

$$\begin{bmatrix} \tilde{B} \\ \phi \\ D_{zu} \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} P^{-1} \hat{A}^T + \hat{A} P^{-1} & \tilde{B}_w & P^{-1} \tilde{C}_z^T \\ \tilde{B}_w^T & -\gamma I & D_{zw}^T \\ \tilde{C}_z P^{-1} & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ \phi \\ D_{zu} \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

(39)式及(41)式分別是線性矩陣不等式，但同時存在變數  $P$  及其反矩陣  $P^{-1}$ ，此矩陣之互補條件可以錐形互補之疊代法則(cone complementary linearization algorithm)[9]來求

解；先令  $D := P^{-1}$ ，在滿足  $DP = I$  原則下，採相互疊代方式求出最適解，進而得目標函數  $\text{Tr}\{[D_0 P + P_0 D]\}$  之最小值；其中，目標值為矩陣  $P$  的維度乘以 2。

茲將其求解步驟敘述如下：

1. 由線性矩陣不等式(39)式及(41)式中求得一組合適的  $P_0$  與  $D_0$ 。
2. 將  $P_0$  與  $D_0$  代入目標函數  $\text{Tr}\{[D_0 P + P_0 D]\}$  中求出一組  $P$  與  $D$ ，然後再令  $P = P_0$ 、 $D = D_0$ ，再代入目標函數中繼續求出  $P_k$  與  $D_k$ 。
3. 若  $P_k$  與  $D_k$  符合  $DP = I$  即可停止，此時疊代所得之目標值趨近矩陣  $P$  的維度乘以 2；否則，令  $k = k + 1$ ，並重複步驟 2 重新求解。

最後，將所求得的矩陣  $P$  代回(38)式，可得到線性矩陣不等式問題，進而可求出控制器  $\Omega$  的狀態空間表示式。

### 3.2 比例-積分控制器設計

比例-積分(PI)控制器廣泛應用於程序控制、儀表安裝、自動化及飛行控制等領域，一般而言，缺乏強健性(robustness)是其最大的弱點。本節希望藉由線性矩陣不等式的方法結合傳統的 PI 控制器並應用至飛彈系統控制，以設計出具強健性之增益排程控制器，期能抑制外界干擾的影響，以確保控制器之強健性。一個典型的 PI 控制器表示式如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_I = G_I y \\ \tilde{u} = k_I x_I + k_p y = \begin{bmatrix} k_p & k_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_I \end{bmatrix} = k_y \tilde{y} \end{cases} \quad (42)$$



將(23)式之擴增系統與(42)式之控制器連結形成一完整的控制系統架構，系統的狀態方程如下所示：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ G_I C_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_w \\ G_I D_{yw} \end{bmatrix} w \quad (43)$$

$$:= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u + \tilde{B}_w w$$

$$\begin{bmatrix} y \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{yw} \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (44)$$

$$:= \tilde{C}_y \tilde{x} + \tilde{D}_{yw} w$$

$$z = \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + D_{zu} u + D_{zw} w \quad (45)$$

$$:= \tilde{C}_z \tilde{x} + D_{zu} u + D_{zw} w$$

將(42)式  $\tilde{u} = k_y \tilde{y}$  中之  $\tilde{y}$  以  $\tilde{C}_y \tilde{x} + \tilde{D}_{yw} w$  替代，

可以推導出

$$\tilde{u} = k_y \tilde{y} = k_y (\tilde{C}_y \tilde{x} + \tilde{D}_{yw} w) = k_y \tilde{C}_y \tilde{x} + k_y \tilde{D}_{yw} w \quad (46)$$

將(46)式代入(43)式及(45)式中，可以得到具有命令追蹤及外擾調適功能之輸出回授的閉迴路控制系統系統，表示如下：

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B}k_y \tilde{C}_y) \tilde{x} + (\tilde{B}_w + \tilde{B}k_y \tilde{D}_{yw}) w \quad (47)$$

$$:= A_{cl} \tilde{x} + B_{cl} w$$

$$z = (\tilde{C}_z + \tilde{D}_{zu} k_y \tilde{C}_y) \tilde{x} + (D_{zw} + \tilde{D}_{zu} k_y \tilde{D}_{yw}) w \quad (48)$$

$$:= C_{cl} \tilde{x} + D_{cl} w$$

其中

$$A_{cl} = \tilde{A} + \tilde{B}k_y \tilde{C}_y \quad (49)$$

$$B_{cl} = \tilde{B}k_y \tilde{D}_{yw} + \tilde{B}_w \quad (50)$$

$$C_{cl} = \tilde{C}_z + D_{zu} k_y \tilde{C}_y \quad (51)$$

$$D_{cl} = D_{zw} + D_{zu} k_y \tilde{D}_{yw} \quad (52)$$

後續步驟可參照 3.1 節第(37)式~(41)式，先利

用實界引理推導出雙線性矩陣不等式(BMI)後，續使用錐形互補之疊代法則，即可求出控制器  $k_y$ 。

### 3.3 全階數控制器設計

本節主要應用輸出回授的方法設計  $H_\infty$  全階數控制器，以確保控制器之強健性。假設控制器表示式如下所示：

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \quad (53)$$

$$u = C_k x_k + D_k y \quad (54)$$

參照 3.1 節即可推導出閉迴路系統表示式如下：

$$\dot{\tilde{x}} = A_{cl} \tilde{x} + B_{cl} w \quad (55)$$

$$z = C_{cl} \tilde{x} + D_{cl} w \quad (56)$$

其中

$$A_{cl} = \tilde{A} + \tilde{B}\Omega\tilde{C}_y = \begin{bmatrix} A + B_x D_k C_y & B_x C_k \\ B_k C_y & A_k \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$B_{cl} = \tilde{B}_w + \tilde{B}\Omega\tilde{D}_{yw} = \begin{bmatrix} B_w + B_x D_k D_{yw} \\ B_k D_{yw} \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$C_{cl} = \tilde{C}_z + D_{zu}\Omega\tilde{C}_y = \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_k C_y & D_{zu} C_k \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$D_{cl} = D_{zw} + \tilde{D}_{zu}\Omega\tilde{D}_{yw} = (D_{zw} + D_{zu} D_k D_{yw}) \quad (60)$$

引用實界引理，若存在一正定之對稱矩陣  $P$ ，滿足下列線性矩陣不等式

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{cl}^T P + P\hat{A}_{cl} & PB_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\mathcal{I} & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (61)$$

則  $\|D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl}\|_\infty < \gamma$ ，並令

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & U \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & V \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$X, Y, U, V \in R^{n \times n}$$

其中  $X, Y$  為正定之對稱矩陣，由

$$P \cdot P^{-1} = I \quad (64)$$

及(62)、(63)式可知

$$P \cdot \begin{bmatrix} X \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

若

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \quad (66)$$

則

$$P\pi_1 = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix} = \pi_2 \quad (67)$$

經由矩陣  $P$  之前後分別乘上實對稱矩陣  $\pi_1^T$  與  $\pi_1$  的全等轉換 (congruence transformation)，並利用(65)式至(67)式可得

$$\begin{aligned} \pi_1^T P \pi_1 &= \pi_1^T \pi_2 = \begin{bmatrix} X & M \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X & XT + MN^T \\ I & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (68)$$

接著在(61)式之前後分別乘上矩陣  $\text{diag}(\pi_1^T, I, I)$  及  $\text{diag}(\pi_1, I, I)$ ，並利用變數代換可得到

$$\begin{bmatrix} \pi_1^T A_{cl}^T P \pi_1 + \pi_1^T P A_{cl} \pi_1 & \pi_1^T P B_{cl} & \pi_1^T C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P \pi_1 & -\mathcal{I} & D_{cl}^T \\ C_{cl} \pi_1 & D_{cl} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (69)$$

其中

$$P\pi_1 = \pi_2 \quad (70)$$

$$\pi_1^T P = (P\pi_1)^T = \pi_2^T \quad (71)$$

利用(70)式及(71)式之關係將(69)式改寫成(72)式

$$\begin{bmatrix} \pi_1^T A_{cl}^T \pi_2 + \pi_2^T A_{cl} \pi_1 & \pi_2^T B_{cl} & \pi_1^T C_{cl}^T \\ B_{cl}^T \pi_2 & -\mathcal{I} & D_{cl}^T \\ C_{cl} \pi_1 & D_{cl} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (72)$$

將(72)式中的各元素矩陣分別提出演算，可表示成：

$$\begin{aligned} &\pi_1^T A_{cl}^T \pi_2 + \pi_2^T A_{cl} \pi_1 \\ &= \begin{bmatrix} (AX + B_x \hat{C}) + (AX + B_x \hat{C})^T & \hat{A}^T + (A + B_x \hat{D} C_y) \\ \hat{A} + (A + B_x \hat{D} C_y)^T & YA + \hat{B}C + A^T Y + (\hat{B}C)^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \pi_2^T B_{cl} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y^T & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w + B_x D_k D_{yw} \\ B_k D_{yw} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_w + B_x \hat{D} D_{yw} \\ YB_w + \hat{B} D_{yw} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \pi_1^T C_{cl}^T &= \begin{bmatrix} X & M \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z^T + C_y^T D_k^T D_{zu}^T \\ C_k^T D_{zu}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (C_z X + D_{zu} \hat{C})^T \\ (C_z + D_{zu} \hat{D} C_y)^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

$$D_{cl} = D_{zw} + D_{zu} \cdot \hat{D} \cdot D_{yw} \quad (76)$$

其中

$$\hat{A} := NA_k M^T + NB_k C_y X + B_k C_k M^T + Y(A + B_k D_k C_y) X \quad (77)$$

$$\hat{B} := NB_k + YB D_k \quad (78)$$

$$\hat{C} := C_k M^T + D_k C_y X \quad (79)$$

$$\hat{D} := D_k \quad (80)$$

由(73)至(76)式，我們可將(72)式改寫如下：

$$\begin{bmatrix} (AX + B_x \hat{C}) + (AX + B_x \hat{C})^T & \hat{A}^T + (A + B_x \hat{D}C_y) & \vdots & (B_w + B_x \hat{D}D_{yw}) & \vdots & (C_z X + D_{zu} \hat{C})^T \\ \hat{A} + (A + B_x \hat{D}C_y)^T & YA + \hat{B}C_y + A^T Y + (\hat{B}C_y)^T & \vdots & (YB_w + \hat{B}_x D_{yw}) & \vdots & (C_z + D_{zu} \hat{D}C_y)^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (B_w + B_x \hat{D}D_{yw})^T & (YB_w + \hat{B}D_{yw})^T & \vdots & -\mathcal{A} & \vdots & (D_{zw} + D_{zu} \hat{D}D_{yw})^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_z + D_{zu} \hat{C} & C_z + D_{zu} \hat{D}C_y & \vdots & D_{zu} + D_{zu} \hat{D}D_{yw} & \vdots & -\mathcal{A} \end{bmatrix} < 0 \quad (81)$$

另從(68)式知  $X$ 、 $Y$  須滿足

$$\pi_1^T \pi_2 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (82)$$

(81)式及(82)式都是線性矩陣不等式的條件式；如此依據矩陣運算原理，就可以將雙線性矩陣不等式的問題解決，並配合極點配置的概念，將輸出回授控制法則與極點配置法則相結合，期望其響應性能能有較佳的表現。

系統極點(特性根)與其暫態性能有密切的關係，系統之動態響應主要是由它的極點位置決定，因此如何簡化暫態響應性能的分析觀念，就成了一個很重要的課題，這也是將來控制器設計的首要步驟。由垂直線、錐扇形及半圓所組成一極點配置區域，如圖 6 所示[8、11]。

若

$$\lambda(A_{cl}) \in D = \left\{ \begin{array}{l} S = x + iy : x < -\alpha < 0, |x + iy| < r, \\ \tan \theta \cdot x < -|y| \end{array} \right\}$$

其中：

$x < -\alpha < 0$  表示垂直線， $|x + iy| < r$  表示半圓形，

$\tan \theta \cdot x < -|y|$  表示錐扇形。

將區域  $D$  表示成如下之不等式

$$2\alpha + S + S^* < 0 \quad (83)$$

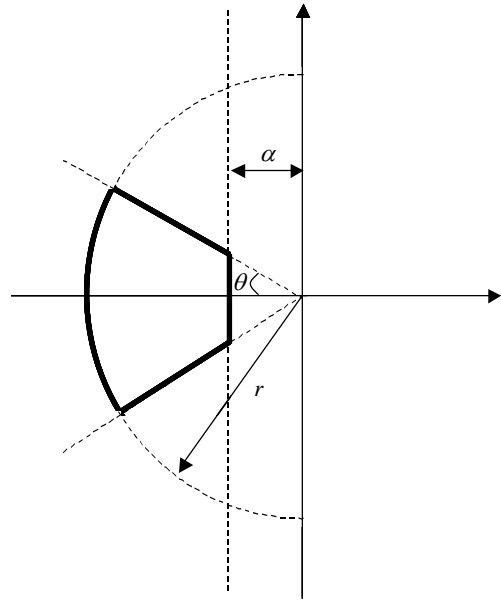


圖 6. 極點配置區域圖。

$$\begin{bmatrix} -r & S \\ S^* & -r \end{bmatrix} < 0 \quad (84)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta (S + S^*) & \cos \theta (S - S^*) \\ \cos \theta (S^* - S) & \sin \theta (S + S^*) \end{bmatrix} < 0 \quad (85)$$

利用矩陣與特徵值及特徵向量的關係  $AX = \lambda X$ ，極點  $S = x + iy$  可視為特徵值，綜整後可推導出下列關係式：

$$(1, S, S^*) \leftrightarrow (X, AX, XA^T) \quad (86)$$

再利用(86)式，將(83)至(85)式改寫成線性矩陣不等式，如(87)式至(89)式所示：

$$2\alpha X + A_{cl} X + XA_{cl}^T < 0 \quad (87)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & A_{cl}X \\ XA_{cl}^T & -rX \end{bmatrix} < 0 \quad (88)$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(A_{cl}X + XA_{cl}^T) & \cos\theta(A_{cl}X - XA_{cl}^T) \\ \cos\theta(XA_{cl}^T - A_{cl}X) & \sin\theta(A_{cl}X + XA_{cl}^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (89)$$

則狀態方程式(55)式及(56)式其閉迴路極點位於區域 $D$ 內，若且為若，存在對稱矩陣 $X$ ，滿足(87)式至(89)式所示極點配置之不等式。由於系統之動態響應主要是由極點位置決定，因此可以利用(87)式至(89)式做極點配置，使系統的動態響應及穩態誤差符合性能指標的要求。

最後，利用(81)式及(82)式及(87)式至(89)式這五個線性矩陣不等式將條件式中之六個變數 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, X, Y$ 求出；另從(68)式可知 $MN^T = I - XY$ ，即可求出 $M, N$ 。最後從(77)式至(80)式可得下列等式：

$$D_k := \hat{D} \quad (90)$$

$$C_k := (\hat{C} - D_k C_y X) M^{-T} \quad (91)$$

$$B_k := N^{-1}(\hat{B} - Y B_x D_k) \quad (92)$$

$$A_k := N^{-1}(\hat{A} - N B_k C_y X - Y B_x C_k M^T - Y(A + B_x D_k C_y)X)M^{-T} \quad (93)$$

#### 四、控制器之實現與系統模擬

本節先給定相對穩定度( $\beta = 0.01$ )，再針對攻角為 $0^\circ$ 時分別設計四階、七階及十階的 $H_\infty$ 固定階數真分型控制器，並從其目標函數 $\text{Tr}\{[D_0 P + P_0 D]\}$ 來判斷所設計的控制器是否合乎要求？目標函數大小決定於矩陣 $P$ 的階數，而矩陣 $P$ 的階數又與矩陣 $A_{cl}$ 相關。先從四階控制器討論，矩陣 $A_{cl}$ 的階數為擴增系統矩陣 $A$ (六階方陣)加上控制器矩陣 $A_k$ (三階方陣)，所以矩陣 $P$ 亦為九階方陣，由此可推論目標函數 $\text{Tr}\{[D_0 P + P_0 D]\}$ 之值應很接近 $2 \times \dim(P)$ ，故四階控制器目標函數值應趨近18；同理，七階控制器目標函數值應趨近24、

十階控制器目標函數值應趨近30；這表示所求之矩陣 $P$ 與 $D$ 符合 $D \times P = I$ 的條件。

其次指定相對穩定度( $\beta = 0.01$ )，再針對攻角為 $-10^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $+10^\circ$ 分別設計 $H_\infty$  PI 控制器，組合成一個增益排程控制器組，相關增益排程之設計是以攻角為判斷依據，當攻角大於 $+5$ 度時，用A控制器；當攻角介於 $-5$ 度與 $+5$ 度時，用B控制器；當攻角為小於 $-5$ 度時，用C控制器；藉由各攻角的相對穩定度，得以確保系統的穩定性。再針對攻角為 $-10^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $+10^\circ$ 分別設計 $H_\infty$ 全階數控制器，給定相對穩定度( $\beta = 0.1$ )。本段的線性矩陣不等式屬GEVP (generalized eigenvalue minimization problem) 型式，所以 $\gamma$ 值是最佳解。

最後針對攻角為 $-10^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $+10^\circ$ ，依照 $H_\infty$ 及極點配置的設計理念，給定自然無阻尼頻率( $w_n = 10^4$ )、共軛極點複數向量與負實軸的夾角( $\theta = 67.5^\circ$ )及共軛極點的實部絕對值(0.5)，分別設計 $H_\infty$ /極點配置全階數控制器。

為了解分析響應性能，依據攻角值為 $-10^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $+10^\circ$ 時，採用Matlab的LMI Tool Box [10]設計四種控制器如下：

- 四階、七階及十階的 $H_\infty$ 真分型增益排程控制器。
- $H_\infty$  PI 增益排程控制器。
- $H_\infty$ 全階數增益排程控制器。
- $H_\infty$ /極點配置全階數增益排程控制器。

並分別輸入函數進行模擬，在增益排程控制的操作模式，由系統變動參數(攻角)的瞬間，決定一個適當控制器。

圖7為輸出回授系統運用 $H_\infty$ 固定階數真分型(4階、7階、10階)增益排程控制器與 $H_\infty$  PI增益排程控制器所模擬的輸出( $\eta$ )與命令信號( $\eta_c$ )之步級響應圖；圖8為輸出回授系統運用 $H_\infty$ 全階數增益排程控制器與 $H_\infty$ /極點配置全階數增益排程控制器所模擬的輸出( $\eta$ )與命令信號( $\eta_c$ )之步級響應圖。由圖中可比較出不同控制器的上升時間、安定時間、最大超越量及穩態誤差等，系統輸出( $\eta$ )與命令信號( $\eta_c$ )之單位為重力加速度(g)。

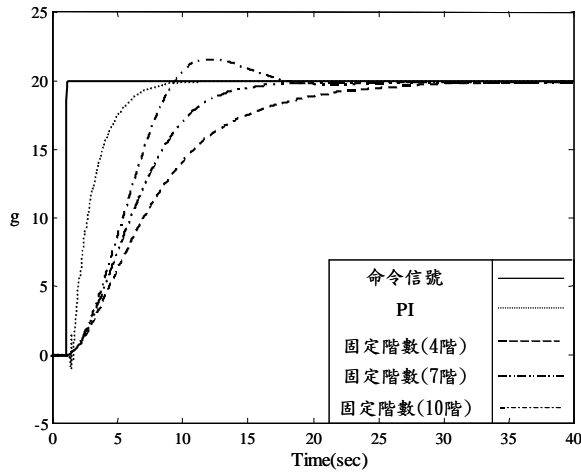


圖 7.  $H_{\infty}$  固定階數真分型增益排程控制器與  $H_{\infty}$  PI 增益排程控制器輸出與命令之步級響應。

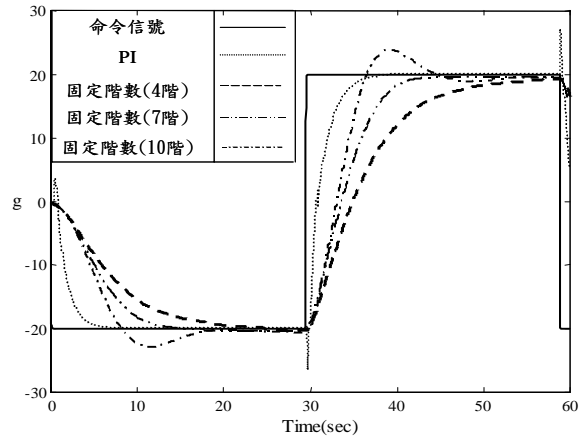


圖 9.  $H_{\infty}$  固定階數真分型增益排程控制器與  $H_{\infty}$  PI 增益排程控制器輸出與命令之方波響應。

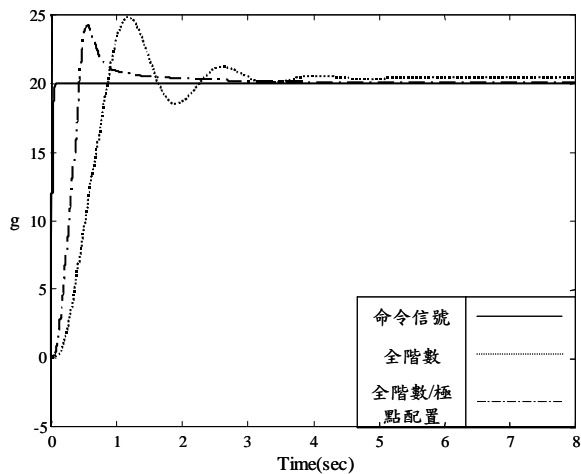


圖 8.  $H_{\infty}$  全階數增益排程控制器與  $H_{\infty}$  極點配置全階數增益排程控制器輸出與命令之步級響應。

圖 9 為輸出回授系統運用  $H_{\infty}$  固定階數真分型增益排程控制器與  $H_{\infty}$  PI 增益排程控制器所模擬的輸出 ( $\eta$ ) 與命令信號 ( $\eta_c$ ) 之方波響應圖，由圖可得知系統輸出能追隨命令信號，將誤差值送給控制器以利做補償動作，並可比較出不同控制器的追隨能力，系統輸出 ( $\eta$ ) 與命令信號 ( $\eta_c$ ) 之單位為重力加速度 (g)。

圖 10 為輸出回授系統運用  $H_{\infty}$  固定階數真分型及 PI 型式增益排程控制器攻角 ( $\alpha$ ) 與方向舵角度 ( $\delta$ ) 之方波響應圖，由圖可得知攻角與方向舵角度之間的關係，當方向舵角度負時表示方向舵向上，依據空氣動力學觀點 [4、12]，此時飛彈尾部受一向下的作用力，飛彈尾部因而向下，換言之，飛彈彈頭部位向上翹，所以攻角增加，反之攻角減少，攻角 ( $\alpha$ ) 與方向舵角度 ( $\delta$ ) 之單位為角度 (deg)。

圖 11 為輸出回授系統運用  $H_{\infty}$  全階數增益排程控制器與  $H_{\infty}$  極點配置全階數增益排程控制器所模擬的輸出 ( $\eta$ ) 與命令信號 ( $\eta_c$ ) 之方波響應圖。圖 12 為  $H_{\infty}$  全階數增益排程控制器與  $H_{\infty}$  極點配置全階數增益排程控制器攻角 ( $\alpha$ ) 與方向舵角度 ( $\delta$ ) 之方波響應圖。

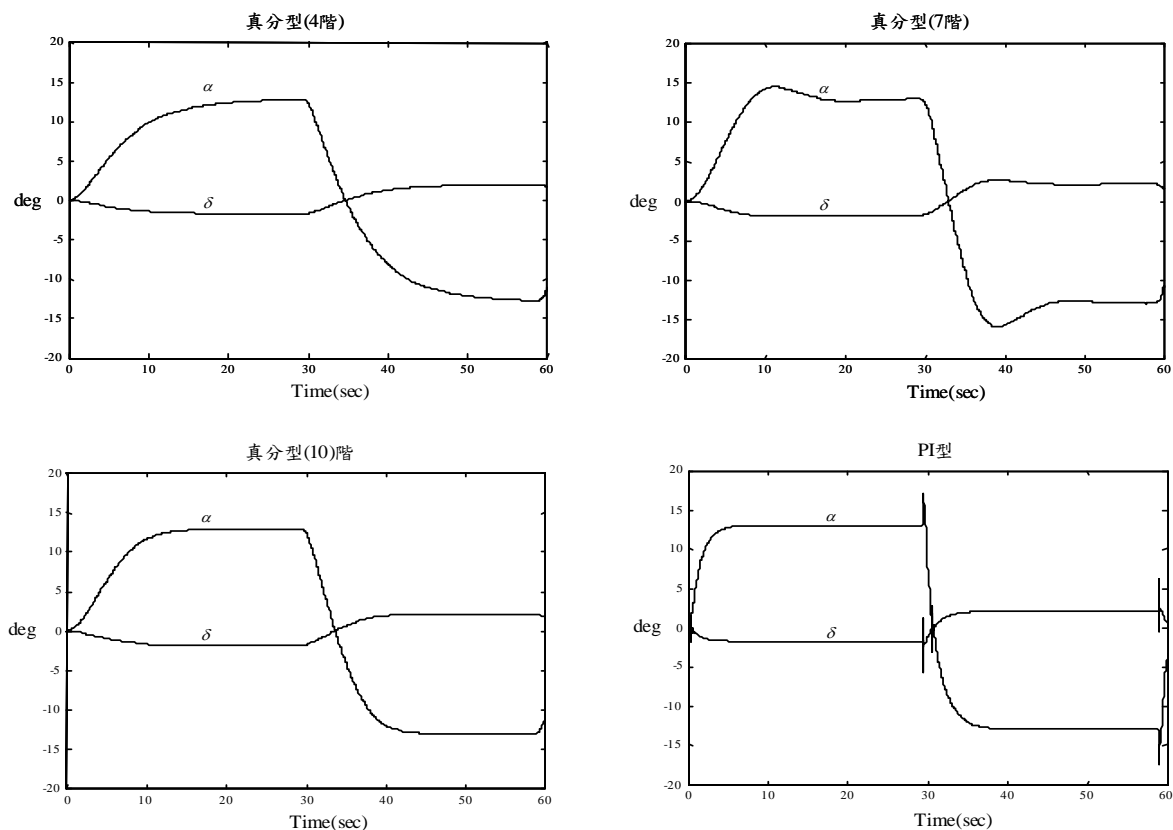


圖 10.  $H_\infty$  固定階數真分型及 PI 型式增益排程控制器攻角( $\alpha$ )與方向舵角度( $\delta$ )方波響應。

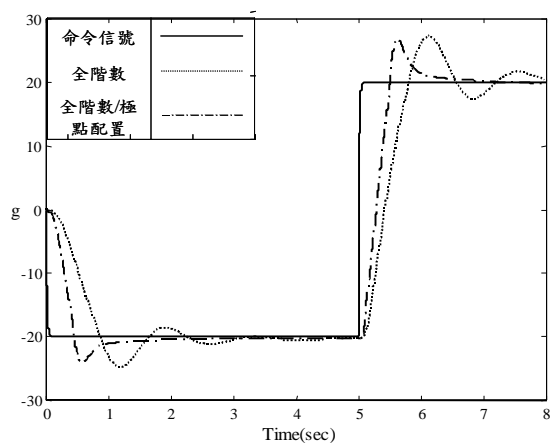


圖 11.  $H_\infty$  全階數增益排程控制器與  $H_\infty$ /極點配置全階數增益排程控制器輸出與命令之方波響應。

使用輸出回授固定階數控制法則可設計出之控制器包含真分型控制器、PI 控制器等，但都只能針對單一目標設計(如： $H_\infty$ )，最多也只能配合相對穩定度的探討，其原因為使用

輸出回授固定階數控制法則設計控制器時，由於控制法則及控制器本身型式的關係，需先解決雙線性矩陣不等式的問題，處理雙線性矩陣不等式之後，因變數矩陣  $P$  及其反矩陣  $P^{-1}$  的原因，尚需使用錐形互補之疊代法則去逼近出最適合的變數矩陣  $P$ ，再將矩陣  $P$  帶回原線性矩陣不等式求控制器增益值，故其過程中無法與其他法則如  $H_2$  或極點配置等相互結合。

使用輸出回授全階數控制法則設計控制器，利用變數變換處理雙線性矩陣不等式後，已經可以直接求解，若再配合  $H_2$ 、極點配置、相對穩定度等理念或許可以增加系統效能。所以輸出回授全階數控制法則，能針對多目標設計(如： $H_\infty$ 、極點配置、相對穩定度)，設計出更具強健性的控制器。綜整上述輸出回授固定階數控制法則與輸出回授全階數控制法則之優缺點如表 1。

對各種不同控制法則所設計出之控制器的模擬響應予以分析比較，特別針對上升時間、安定時間、最大超越量、穩態誤差等，以了解各種控制法則的在模擬上的差異如表 2。

(a) 固定階數控制器：其上升時間、安定時間以 PI 控制器為佳，真分型十階控制器次之，餘依序為真分型七階控制器、真分型

四階控制器。

(b) 全階數控制器：配合極點配置之系統其上升時間、安定時間都比無極點配置的系統更符合性能指標，由此可知，極點配置法則會影響上升時間、安定時間與最大超越量。

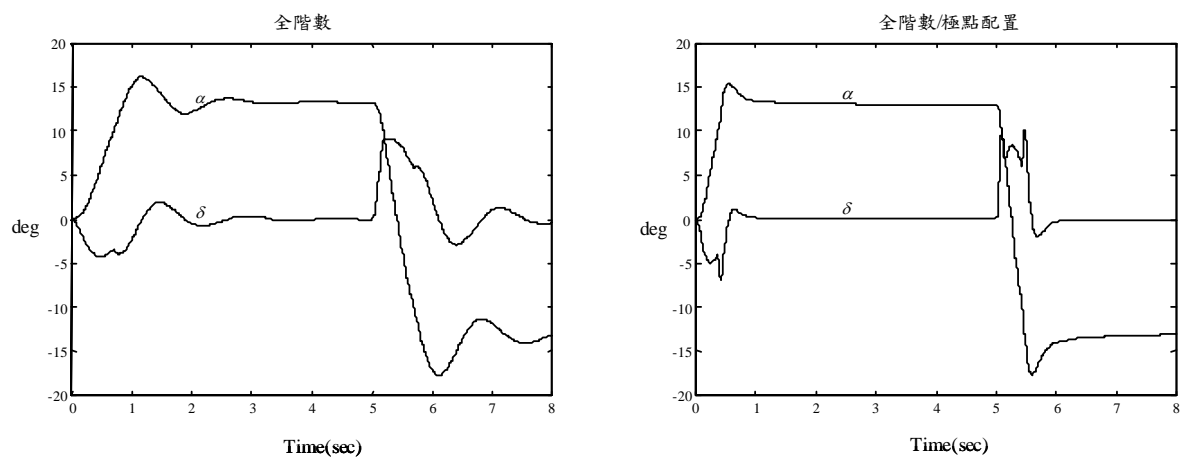


圖 12.  $H_\infty$  全階數增益排程控制器與  $H_\infty$ /極點配置全階數增益排程控制器攻角與方向舵角度之方波響應。

表 1. 設計理念優缺點分析表。

	系統擴充性	結論(優缺點)
輸出回授固定階數 控制器設計法則	不佳； 僅可針對單一目標設計，如： $H_\infty$ 結合相對穩定度。	(1)PI 控制器方便實用，廣為業界使用。 (2)可依需求調整控制器階數。 (3)需使用疊代法解 BMI 問題。 (4)對大型系統之控制能力有限。
輸出回授全階數 控制器設計法則	佳； 可針對多目標設計，如： $H_\infty$ 結合 $H_2$ ，亦可結合極點配 置與相對穩定度。	(1)符合性能指標之要求。 (2)只需使用變數變換即可解 BMI 問題。 (3)控制器之階數由系統決定，若系統為高階 系統，所設計之控制器其實用性會降低。

表 2. 模擬響應特性分析表。

	上升時間	安定時間	最大超越量	穩態誤差
$H_{\infty}$ 輸出回授固定階數真分型 (4 階) 控制器設計	20 sec	30 sec	0 %	0 %
$H_{\infty}$ 輸出回授固定階數真分型 (7 階) 控制器設計	12 sec	18 sec	0 %	1 %
$H_{\infty}$ 輸出回授固定階數真分型 (10 階) 控制器設計	7 sec	16 sec	10 %	1 %
$H_{\infty}$ PI 控制器設計	6 sec	9 sec	0 %	0 %
$H_{\infty}$ 輸出回授全階數控制器設計	0.7 sec	4.5 sec	25 %	2.7 %
$H_{\infty}$ / 極點配置輸出回授全階 數控制器設計	0.5 sec	1.6 sec	20 %	2.5 %

## 五、結論

本文針對非線性之飛彈動態系統，利用線性參數變換及線性矩陣不等式，配合輸出回授及極點配置法則，設計出達到使用者性能要求之增益排程強健控制器，不僅具有卓越之控制效果，並容許系統存在不確定性、抵抗外來擾動及抑制雜訊干擾之特性，提供一定之控制強健性；其優異的性能可由一連串的模擬結果觀察得到。

## 參考文獻

- [1] Leith, D. J. and Leithead, W. E., "Survey of Gain-Scheduling Analysis and Design," *International Journal of Control*, Vol. 73, No. 11, pp.1001-1025, 2000.
- [2] Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron E., and Balakrishnan, V., Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,

the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

- [3] Roger, W. Part, Flight Control Systems Practical Issues in Design and Implementation, the Institution of Electrical Engineers, 2000.
- [4] Blakelock J. H., Aircraft and Missiles, John Wiley & Sons, 1991.
- [5] Shamma, J. S. and Cioutier, J. R., "Gain-Scheduled Missile Autopilot Design Using Linear Parameter Varying Transformations," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, March-April 1993.
- [6] Gahinet, P. and Apkarian, P., "A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_{\infty}$  Control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, pp. 421-448, 1994.
- [7] Zhou, K. and Doyle, J.C., Essentials of



Robust Control, Prentice-Hall, 1998.

- [8] Apkarian, P., Gahinet, P., and Greg Becker, Linear Matrix Inequalities in Control Engineering From Theory to Practice, CDC Workshop, 1996.
- [9] Ghaoui, L. E., Oustry, F., and AitRami, M., "A Cone Complementary Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 8, pp.1171-1176, August, 1997.
- [10] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub A. J., and Chilali, M., LMI Control Toolbox, MathWorks Inc, Natick, MA, 1995.
- [11] Kuo, B. C. and Golnaraghi, F, Automatic Control Systems, Wiley, 2003.
- [12] 王懷柱, 揭開飛行的奧秘, 全華科技圖書股份有限公司, 2001。

## 符號說明

$c_z$  : 推力係數

$c_m$  : 俯仰力矩係數

$d$  : 參考直徑,  $0.75\text{ ft}$

$f$  : 徑度對角度之轉換,  $\frac{180}{\pi}$

$g$  : 重力加速度,  $32.2\frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$

$I_{yy}$  : 俯仰慣量,  $182.5\text{ slug} - \text{ft}^2$

$j_w$  : 重量,  $450\text{ lb}$

$m$  : 俯仰力矩,  $\text{ft} - \text{lb}$

$Q$  : 狀態壓力,  $6132.8\text{ lb} - \text{ft}^{-2}$

$q$  : 俯仰率,  $\frac{\text{deg}}{\text{s}}$

$s$  : 參考面積,  $0.44\text{ ft}^2$

$v$  : 速度,  $3109.3\frac{\text{ft}}{\text{s}}$

$w_a$  : 致動器頻寬,  $150\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$Z_f$  : 推力,  $\text{lb}$

$\alpha$  : 攻角,  $\text{deg}$

$\delta$  : 安定面傾斜角,  $\text{deg}$

$\delta_c$  : 安定面傾斜角命令,  $\text{deg}$