

適應性輸入估測法結合有限元素法於噴流熱通量之逆向估算

陳台生* 張鴻源** 陳聰堅* 段伴虬**

*國防大學中正理工學院兵器工程學系

**南開技術學院資訊工程系

摘 要

飛彈發射瞬間產生之高溫噴流對艦艇甲板產生之溫度分佈將影響甲板防火材料之設計及成本，本文藉由模擬實驗取得熱電偶量測溫度數據，使用包含卡爾曼濾波器及遞迴式最小平方估測器之適應性輸入估測法結合有限元素法針對飛彈發射期間噴流熱通量進行線上逆向估算，藉由輸入估算慮波技術將未知的系統偏差量即時估算並授入濾波器中校正狀態估算之準確度及克服發散問題，最小平方估測器則藉由濾波器產生之剩餘值更新序列遞迴地計算輸入系統的未知時變噴流熱通量，由數個典型時變噴流熱通量之估算結果驗證本法勿需量測整批溫度數據、遞迴式計算結構之線上估算可有效、快速、精確估算噴流熱通量。

關鍵詞：噴流熱通量，適應性輸入估測法，有限元素法

Adaptive Input Estimation Method Combining Finite Element Scheme for Inverse Jet Flow Heat Flux Estimating

Tai-Sheng Chen*, Horng-Yuan Jang**, Tsung-Chien Chen*,
and Pan-Chio Tuan**

* *Department of System Engineering, Chung Cheng Institute of Technology, National Defense University*

** *Department of Computer Science & Information Engineering, Nan Kai Institute of Technology*

ABSTRACT

A missile launch will produce a high temperature jet flow, the high temperature jet flow effects on the design and prime cost for fireproof decking is considered. This work presents an on-line inverse method based on the adaptive input estimation method that combines the finite element scheme to estimate unknown jet flow heat flux. The temperature is measured using a thermocouple at the outer surface of a steel plate. The input estimator develops a recursive relation between the observed residual sequence value with unknown heat flux and a theoretical residual sequence to improve the state estimate accuracy and avoid the divergence problem. A recursive least square estimator is derived that uses the residual innovation sequence to compute the magnitude of the unknown jet flow heat flux. The superior capabilities of the proposed method are analyzed and demonstrated using several typical cases with time varying jet flow heat flux input. The results show that the proposed method has the advantages of stability and good accuracy.

Keywords: jet flow heat flux, adaptive input estimation method, finite element scheme

文稿收件日期 93.08.05; 文稿修正後接受日期 94.11.11.

Manuscript received August 05, 2004; revised November 11, 2005.

一、前言

在實際熱傳導問題中，若其初始條件(Initial conditions)、邊界條件(Boundary conditions)及其他熱物理性質為已知時，則可直接由熱傳導方程式求解溫度場分佈情形，此類型之熱傳問題稱為直接熱傳導問題(Direct heat conduction problem, DHCP)；然而實際工程問題卻常發生邊界條件或熱物理性質無法預知，藉量取熱導體內部或邊界某點可量測之溫度數據，再經由逆向熱傳導解法逆向估算未知之邊界條件或物理性質，如熱通量、熱源、熱傳導係數、熱容係數、熱接觸係數等，稱為逆向熱傳導問題(Inverse heat conduction problem, IHCP)，經逆估算求得未知量後即可求解整個溫度場分佈，在國防軍事科技如火藥鏈各組成單元燃燒時瞬間生成之能量、底火瞬間點燃時所釋放出之熱通量、膛內彈道中槍砲管內壁熱通量及溫度計算、藉由槍管外壁變形量之量測逆估算槍膛內壁壓力、反艦飛彈發射時推進系統之燃氣噴流火焰溫度對甲板之影響、垂直起降戰機之發動瞬間所產生之高溫噴流、彈道飛彈及太空梭重返大氣層時表面與大氣摩擦產生之表面高溫、熔裝固化過程之接觸熱傳係數、雷達輻射源位置估測等皆屬逆向熱傳導問題之範疇。因此，發展 IHCP 解法來解決工程上某些問題是存在且必要的，本文發展線上適應性輸入估測法結合有限元素法首度應用於噴流熱通量之估算。

過去三十年來，發展出許多 IHCP 的理論與解法，1955 年 Giedt [1] 為求解四 0 砲管之管壁內部暫態溫度分佈，最早涉及逆向熱傳問題，接著於 1957 年 Stolz [2] 提出藉由量測溫度估算出球體表面溫度及熱通量之數值逆向解法，並應用於淬火測試中，由於 Stolz 所提方法在時間間距減小時，因對量測誤差之靈敏造成估測之不穩

定，要能有效準確估測，必須降低估算法之不穩定性及靈敏度，另一種被廣泛應用之逆向熱傳導問題解法，稱為調整法[3]，將待估算之未知量，以時間來區隔成許多段，再利用所累積量測之量測數據同時估算每一段之未知量，屬於整批或整體式之解法，一般可分成全域調整法[4,5]與共軛梯度疊代法[6-9]兩種，全域調整法演算公式簡單，但若逆向求解相當長時間則逆矩陣之維數增加，計算負荷將隨之增加。共軛梯度疊代法是以最佳控制觀念來推導逆向熱傳導問題解法，具有效率的疊代計算結構，對於待估算之物理量不需做任何函數型態的假設，但該法於最終時間間距時，梯度值趨近於最初所設定常數值，造成無法一致收斂。因上述兩種演算法之各自缺點及必須離線整批式處理量測數據，因此，調整法僅能應用在一些特殊的逆向熱傳問題上。Kalman [10] 於 1960 年提出遞迴式慮波方法，具有處理帶有雜訊之量測數據及遞迴方式估算狀態之能力，但因突然的未知偏差量輸入系統，由於濾波器數學模式之誤差會導致發散現象，Chan 等[11]於 1979 年提出輸入估算技術克服此發散現象，Bogler [12]和 Meng [13]則改良計算方法並應用在瞬變目標追蹤問題上，仍屬整批式估算方法，計算效率較差，直至 1995 年 Scarpa 及 Milano [14]提出高效率之卡爾曼濾波器平滑技術，應用卡爾曼濾波器的狀態空間來同時描述溫度場狀態變化與未知之熱通量變化，並以未來時間量測來解決逆向熱傳問題的擴散延遲(Diffusion Lag)與系統動態響應延遲(System dynamics response lag)，用來處理對量測誤差具高靈敏度之逆向熱傳導問題，雖然，已應用卡爾曼濾波器，但仍屬於時序解法，其將輸入視為狀態，當程序雜訊設定有誤，則會產生發散或失效問題。1996 [15]年 Tuan 提出結合卡爾曼濾波器及遞迴式最小平方演算法之線上輸入估測法則，用於即時估算一維及二維 IHCP 之未知熱通量[16,17]，藉由卡爾曼濾波

器產生一剩餘值更新序列，再以最小平方方法對參數值進行估算，每一次估算只要求使用前一時刻的輸出數據和當前的一次觀測數據，減少計算時之記憶容量，對於解決 IHCP 已獲致良好成效。

有鑒於實際 IHCP 若發生於不規則形狀物體時，其狀態方程式之建立較為困難，本研究首次提出線上適應性輸入估測法則結合有限元素法應用於逆向熱傳導估測之研究，在空間導數採用有限元素法(Finite Element Method) [18]近似，獲得連續時間狀態方程式後，再結合適應性輸入估測法估算未知時變輸入量，本文以帶有雜訊之模擬實驗量測溫度，建立一維直角座標理論基礎，模擬幾種典型之時變噴流熱通量驗證估算結果，期能解決更多且實際之 IHCP 問題。

二、數學模式

假設在噴流噴出口裝有一厚度為 L 之擋板，且為均質熱導體，噴流噴出之未知熱通量 $q(t)$ 作用於此熱導體 $x=0$ 處，熱導體另一端 $x=L$ 處之表面則為完全絕熱條件，並將量測溫度之熱電偶置於 $x=L$ 處，幾何說明如圖 1 所示。

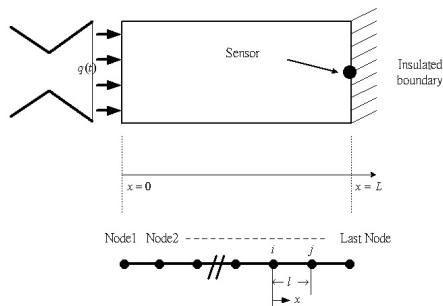


圖 1. 一維直角座標 IHCP 之連續與離散幾何模式。

熱傳導數學統御方程式如下：

$$K_s \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \rho C_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{in } 0 \leq x \leq L, t > 0 \quad (1a)$$

$$-K_s \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q(t) \quad \text{at } x=0, t > 0 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x=L, t > 0 \quad (1c)$$

$$T(x,0) = T_0 = 0 \quad \text{for } t=0, \text{ in } 0 \leq x \leq L \quad (1d)$$

$$Z(L,t) = T(L,t) + v(t) \quad (\text{量測溫度}) \quad (1e)$$

定義 $\lambda = \rho C_p$ ，以有限元素法對空間座標離散，首先求取符合統御方程式(1a)及邊界條件(1b)及(1c)之等效函數公式 J ：

$$J = \int_V \frac{1}{2} \left[K_s \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + 2\lambda \frac{\partial T}{\partial t} T \right] dV + \int_S [qT] dS \quad (2)$$

一維直角座標線性元素溫度表示如下：

$$T^e = N_i^e T_i + N_j^e T_j = [N^e] \{T\} \quad (3)$$

$[N^e]$ 代表在局部座標下定義之形狀函數矩陣(Shape Function Matrix)

$$N_i^e = \left(1 - \frac{x}{l}\right), N_j^e = \frac{x}{l}$$

$$[N^e] = \begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (4)$$

上式中 $l = X_j - X_i$ ，將方程式(3)取位置之導數，得到矩陣向量 $\{g^e\}$ ，如下：

$$\begin{aligned} \{g^e\} &= \frac{\partial T^e}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \end{bmatrix} \{T\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} T_i + \frac{1}{l} T_j \\ \frac{1}{l} T_i - \frac{1}{l} T_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = [B^e] \{T\} \end{aligned} \quad (5)$$

$[B^e]$ 矩陣代表形狀函數 $[N^e]$ 之位置導數，稱為梯度矩陣

$$[D^e] = [K_s^e] \quad (6)$$

$[D^e]$ 為包含熱傳導係數之係數矩陣，將方程式(5)，(6)式代入(2)式中，得到

$$\begin{aligned} J &= \sum_{e=1}^E \int_{V^e} \frac{1}{2} \{g^e\}^T [D^e] \{g^e\} dV \\ &\quad + \sum_{e=1}^E \int_{V^e} T^e \lambda^e \frac{\partial T^e}{\partial t} dV + \int_{S^c} T^e q dS \end{aligned} \quad (7)$$

其中 E 為分割元素總數，上標 e 代表單一元素，將(7)式重新表示如下：

$$J = J^1 + J^2 + \dots + J^E = \sum_{e=1}^E J^e \quad (8)$$

對第(3)式取時間導數，得到

$$\frac{\partial T^e}{\partial t} = [N^e] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} \quad (9)$$

將(5)、(9)式代入(7)式中，取其單一元素，得到如下：

$$\begin{aligned} J^e = & \int_{V^e} \frac{1}{2} \{T\}^T \{B^e\}^T [D^e] \{B^e\} \{T\} dV \\ & + \int_{V^e} \lambda [N^e] \{T\} [N^e] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} dV \\ & + \int_{S_1^e} q [N^e] \{T\} dS \end{aligned} \quad (10)$$

對(10)式中相對於元素中每一節點上之溫度值取最小化：

$$\frac{\partial J^e}{\partial \{T\}} = [C^e] \frac{\partial T}{\partial t} + [M^e] \{T\} + \{f^e\} = 0 \quad (11)$$

$$[C^e] = \int_V \lambda [N^e]^T [N^e] dV = \frac{\lambda A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} [M^e] &= \int_V [B^e]^T [D^e] [B^e] dV \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} [K_s] \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} A dx = \frac{AK_s}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\{f^e\} = \int_{S_1} q [N^e]^T dS = \{ff\} q \quad (14)$$

$\{ff\}$ 代表係數向量，當熱通量加在左邊第一個元素之左邊界處，可得到

$$\{f^1\} = \{ff\} q = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} q \quad (15)$$

其他元素沒有熱通量所以

$$\{f^e\} = \{ff\} q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} q \quad (16)$$

對(2)式中整體元素相對於每一節點上之溫度值取最小化：

$$\frac{\partial J}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^E J^e = \sum_{e=1}^E \frac{\partial J^e}{\partial \{T\}} = 0 \quad (17)$$

求得系統一階線性微分方程式如下：

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [M] \{T\} + \{F\} = 0 \quad (18)$$

$[C]$ 為整體熱容矩陣(Capacitance Matrix)， $[M]$ 為整體熱傳導矩陣(Conductance Matrix)， $\{F\}$ 為熱輸入向量(Thermal Load Vector)，分別為代表單一元素矩陣 $[C^e]$ 、 $[M^e]$ 、 $\{f^e\}$ 之組合。

一維無因次熱傳導數學統御方程式如下：

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial \bar{T}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{in } 0 \leq \bar{x} \leq 1, \tau > 0 \quad (19a)$$

$$\frac{\partial \bar{T}(0, \tau)}{\partial \bar{x}} = \bar{q}(\tau) \quad \text{at } \bar{x} = 0, \tau > 0 \quad (19b)$$

$$\frac{\partial \bar{T}(1, \tau)}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{at } \bar{x} = 1, \tau > 0 \quad (19c)$$

$$\bar{T}(\bar{x}, 0) = 0 \quad \text{for } \tau = 0, \text{ in } 0 \leq \bar{x} \leq 1 \quad (19d)$$

$$\bar{Z}(1, \tau) = \bar{T}(1, \tau) + v(\tau) \quad (\text{量測溫度}) \quad (19e)$$

無因次參數如下：

$$\bar{T} = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}, \quad \tau = \frac{\alpha t}{L^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{q}(\tau) = \frac{Lq(t)}{K_s(T_\infty - T_0)}$$

x 代表空間座標， L 代表擋板厚度， α 為熱擴散係數， K_s 為熱傳導係數， $q(t)$ 代表作用於擋板壁面未知噴流熱通量， T 代表溫度， T_0 為初始溫度， T_∞ 代表周遭環境溫度為常數， t 代表時間， \bar{x} 為無因次徑向空間座標， $\bar{q}(\tau)$ 無因次未知噴流熱通量， \bar{T} 為無因次溫度， τ 為無因次時間，本文以有限元素法對空間座標離散，首先求取符合統御方程式(19a)及邊界條件(19b)及(19c)之等效函數公式 J ：

$$J = \int_V \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right] dV + \int_S [\bar{q} \bar{T}] dS \quad (20)$$

對(20)式中相對於每一節點上之溫度值取最小化：

$$\frac{\partial J}{\partial \{\bar{T}\}} = \frac{\partial}{\partial \{\bar{T}\}} \sum_{e=1}^E J^e = \sum_{e=1}^E \frac{\partial J^e}{\partial \{\bar{T}\}} = 0$$

可求得系統一階線性微分方程式如下：

$$[C] \frac{\partial \{\bar{T}\}}{\partial \tau} + [M] \{\bar{T}\} + \{F\} = 0 \quad (21)$$

將方程式(21)重新整理並考慮虛擬的程序雜訊輸入[19]，可得連續時間狀態方程式如下：

$$\dot{\bar{T}}(\tau) = \Psi \bar{T}(\tau) + \Omega [\bar{q}(\tau) + \omega(\tau)] \quad (22)$$

$$\Psi = (-1) [C]^{-1} [M]$$

$$\Omega = (-1) [C]^{-1} \{ff\}$$

其中 $\bar{T}(\tau)$ 為 $n \times 1$ 之狀態向量， n 為節點總數， Ψ 為 $n \times n$ 係數矩陣， Ω 為 $n \times 1$ 係數向量， \bar{q} 代表未知的邊界輸入熱通量， $\omega(\tau)$ 是假設均值為零具白色高斯雜訊的模式誤差，連續時間狀態方程式(22)式，取樣時間長度 $\Delta\tau$ ，離散化如下：

$$X(k) = \Phi X(k-1) + \Gamma [\bar{q}(k-1) + \omega(k-1)] \quad (23)$$

其中

$$X(k-1) = [\bar{T}_1 \quad \bar{T}_2 \quad \bar{T}_3 \quad \dots \quad \bar{T}_{n-1} \quad \bar{T}_n]^T$$

$$\Phi = e^{\Psi \Delta\tau}$$

$$\Gamma = \int_{k\Delta\tau}^{(k+1)\Delta\tau} \exp\{\Psi[(k+1)\Delta\tau - t]\} \Omega dt$$

X 代表溫度狀態向量， Φ 是狀態轉移矩陣， Γ 是輸入矩陣， \bar{q} 是確定性輸入序列， $\omega(k-1)$ 是程序雜訊輸入向量，系假設均值為零的白色高斯雜訊，而變異量 (Variance) 為 $E\{\omega(k)\omega^T(j)\} = Q\delta_{kj}$ ， δ_{kj} 表 Kronecker delta 函數。量測方程式 (19e) 離散化如下：

$$\bar{Z}(k) = HX(k) + v(k) \quad (24)$$

其中 $\bar{Z}(k)$ 是在時間 $k\Delta\tau$ 時之觀測向量 (Observation vector)， H 代表量測矩陣 (Measurement matrix)， $v(k)$ 是量測雜訊向量，系假設均值為零的白色高斯雜訊，變異量為 $E\{v(k)v^T(j)\} = R\delta_{kj}$ 。

三、適應性輸入估測法

適應性輸入估測法主要由兩部份組合而成，即卡爾曼濾波器與具適應性權重因子之遞迴式最小平方演算法，系統輸入為未知時變噴流熱通量，利用量測的溫度數據與估測溫度值之誤差

所產生之更新剩餘值為性能指標，藉由遞迴式最小平方演算法，進而精確地估算出噴流熱通量，卡爾曼濾波器在程序誤差變異量 Q 及量測誤差變異量 R 之設定下運作，詳細之推導請參考[15]。

(一) 卡爾曼濾波器之公式如下：

$$\bar{X}(k/k-1) = \Phi \bar{X}(k-1/k-1) \quad (25)$$

$$P(k/k-1) = \Phi P(k-1/k-1) \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \quad (26)$$

$$s(k) = H P(k/k-1) H^T + R \quad (27)$$

$$K(k) = P(k/k-1) H^T s^{-1}(k) \quad (28)$$

$$P(k/k) = [I - K(k)H] P(k/k-1) \quad (29)$$

$$\hat{Z}(k) = Z(k) - H \bar{X}(k/k-1) \quad (30)$$

$$\bar{X}(k/k) = \bar{X}(k/k-1) + K(k) \hat{Z}(k) \quad (31)$$

(二) 遞迴式最小平方演算法如下：

$$S(k) = H[\Phi m(k-1) + I] \Gamma \quad (32)$$

$$m(k) = [I - K(k)H][\Phi m(k-1) + I] \quad (33)$$

$$K_b(k) = \gamma^{-1} P_b(k-1) S^T(k) [S(k) \gamma^{-1} P_b(k-1) S^T(k) + s(k)]^{-1} \quad (34)$$

$$P_b(k) = [I - K_b(k)S(k)] \gamma^{-1} P_b(k-1) \quad (35)$$

$$\hat{q}(k) = \hat{q}(k-1) + K_b(k) [\hat{Z}(k) - S(k) \hat{q}(k-1)] \quad (36)$$

其中 $\hat{q}(k)$ 為輸入熱通量之估算值， $P_b(k)$ 為輸入估算誤差變異量， $K_b(k)$ 為校正增益 (Correction gain)、 γ 為權重因子 (Weighting factor)、 $S(k)$ 及 $m(k)$ 是敏感矩陣，而 $K(k)$ 為卡爾曼增益、 $\hat{Z}(k)$ 為狀態量測值與估算值之誤差，代表剩餘值更新序列、 $s(k)$ 為剩餘值變異量。

Huber 使用一 Least Favorable 機率密度函數 $f(v(k))$ 來彈性地描述餘數，常態表示沒有輸入量或非常態表示有輸入量，其中， $\hat{z}(k) = v(k)$ ，而 $f(\hat{z}(k))$ 被定義如下：

$$f(\hat{z}(k)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\hat{z}(k)^2}{2\sigma^2}}, & |\hat{z}(k)| \leq c \\ \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\hat{z}(k)|}, & |\hat{z}(k)| > c \end{cases} \quad (37)$$

其中 c 為一調和常數，意指調整估測器強健性的

程度，從(37)式可知當 $|\hat{z}(k)| \leq c$ 時， $f(v(k))$ 為一常態分配；另外當 $|\hat{z}(k)| > c$ 時， $f(v(k))$ 為一長尾分配，係以雙指數密度函數描述可能之異常樣本，以降低異常樣本於估測器內之權重與影響，而獲致強健性 (Robustness)，因此 c 可視為一個門檻 (Threshold) 以有效偵測輸入的起始，假使偵測器是準確的，可以視 $c = \sigma$ 為一合理的門檻標準。詳細推導可參考段等於1998年發表適應性強健權重函數 γ 之論著[20]，最後將其適應式權重函數公式描述如下：

$$\gamma(k) = \begin{cases} 1, & |\hat{z}(k)| \leq \sigma \\ \frac{\sigma}{|\hat{z}(k)|}, & |\hat{z}(k)| > \sigma \end{cases} \quad (38)$$

利用(38)式以取代(34)、(35)式中的 γ 值，便可建構一個適應性權重函數的遞迴式最小平方估測器(RLSE)。

四、結果與討論

本文採模擬實驗分析方法，使用典型熱通量輸入驗證本法對噴流熱通量線上估算之效能，以下針對三種不同時變無因次噴流熱通量來驗證本文所用演算法估算之準確度，所有模擬驗證工作係在PIII-450個人電腦，以撰寫MATLAB 5.03版套裝軟體程式進行，有關連續時間系統狀態方程式轉換成離散時間系統狀態方程式，是以MATLAB中之c2d函數轉換。估算流程圖如圖2所示，空間離散間隔 $\Delta \bar{x} = 0.2$ ，模擬量測溫度熱電偶置於噴流擋板壁面 $\bar{x} = 1$ 處，取樣時間 $\Delta \tau = 0.01$ ，量測誤差變異量 $R = \sigma^2 = 10^{-4}$ ， σ 為標準偏差量，卡爾曼濾波器之初始條件：

$$\bar{X}(-1/-1) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

$$P(-1/-1) = \text{diag}[10^{10}]$$

遞迴式最小平方方法之初始條件：

$\hat{q}(-1) = 0$ ， $P_b(-1) = 10^8$ 與 $M(-1)$ 為零的矩陣， γ 採用適應性權重因子。

$P(-1/-1)$ 與 $P_b(-1)$ 值一般設定為非常大的值，主要是將初始誤差視為非常大，使輸入估測器能夠經過短暫暫態反應時間而快速收斂，進而穩定的追蹤時變參數，本文係先假設一恰當值 $\bar{q}(\tau)$ 作為噴流熱通量，經由直接熱傳導解法對熱傳方程式中之時間導數採用前向差分，求解溫度場之分佈，再藉由所求得溫度場加上量測誤差，作為模擬量測點熱電偶所量測之溫度。

$$\bar{Z}(\tau, \bar{x}) = \bar{T}(\tau, \bar{x}) + \omega \sigma \quad (39)$$

ω 為隨機變數 $-2.576 \leq \omega \leq 2.576$ ，假設熱電偶已選定，因此固定量測雜訊變異量值 $R = \sigma^2 = 10^{-4}$ ，透過以下三種典型的無因次熱通量作估算分析。

例一：三角波型熱通量估算

假設時變噴流熱通量為三角波型輸入，如下：

$$\bar{q}(\tau) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \tau < 0.8, 2.4 < \tau \leq \tau_f \\ 100 * (0.25\tau - 0.2) & 0.8 \leq \tau \leq 1.6 \\ 100 * (-0.25\tau + 0.6) & 1.6 < \tau \leq 2.4 \end{cases} \quad (40)$$

假設量測雜訊標準偏差 $\sigma = 10^{-2}$ ，程序雜訊變異量 $Q = 10^{-1}$ ，逆向估算結果，溫度場分佈如圖3所示，圖4表示在 $\bar{x} = 1$ 處熱電偶量測溫度與估算溫度之結果比較，溫度場估算與量測溫度非常接近，圖5比較在程序雜訊變異量 $Q = 10^{-1}$ 及 $Q = 10^{-3}$ 估算噴流熱通量結果，可驗證輸入估測法結合有限元素法對於瞬間產生脈衝之時變參數具有非常快速精確之估算結果，且時變熱通量改變越快速，程序雜訊變異量需取較大值，雖有震盪但估算反應較快，程序雜訊變異量若取較小值估算結果會較為平滑且有遲滯現象發生。

例二：正旋波型熱通量估算

$$\bar{q}(\tau) = 4 * \exp(-\tau/4) * \sin(0.2\tau) \quad 0 \leq \tau \leq \tau_f \quad (41)$$

假設量測雜訊標準偏差 $\sigma = 10^{-2}$ ，程序雜訊變異量 $Q = 10^{-2}$ ，逆向估算結果，溫度場分佈如圖6所示，圖7表示在 $\bar{x} = 1$ 處熱電偶量測溫度與估算溫度之結果比較，溫度場估算與量測溫度非常

接近，圖 8 比較在程序雜訊變異量 $Q=10^{-2}$ 及 $Q=10^{-3}$ 估算噴流熱通量結果，與例一有相同趨勢，程序雜訊變異量取大值，將造成估算震盪增大但估算反應較快，程序雜訊變異量若取較小值估算結果會較為平滑且有遲滯現象發生。程序雜訊變異量 Q 包含於卡爾曼濾波器中如方程式 (26)，當 Q 大，則濾波誤差共變異量 P 變大，造成濾波增益 $K(k)$ 變大，如方程式 (28) 所示，由圖 5 結果可看出當估算之未知量是瞬間反應之熱通量時，代表熱電偶量測之訊號反應需非常快速，必須較為相信量測值之訊號，作為估算未知輸入之依據，因此可看出當程序雜訊變異量 Q 值較大時，反而對瞬間反應之熱通量估算效果會較好。想反的，若輸入熱通量非瞬間反應之急劇變化量，則此時，若能在較小的程序雜訊變異量 Q 及量測誤差變異量 R 之情況下估算，將可獲得較好的估算結果，從圖 8 與圖 5 結果比較可得到驗證。

例三：正弦波型熱通量估算

$$\bar{q}(\tau) = 400 * \exp(-\tau/4) * \sin(0.2\tau) \quad 0 \leq \tau \leq \tau_f \quad (42)$$

假設量測雜訊標準偏差 $\sigma = 10^{-2}$ ，程序雜訊變異量 $Q = 10^{-2}$ ，逆向估算結果，溫度場分佈如圖 9 所示，圖 10 表示在 $\bar{x} = 1$ 處熱電偶量測溫度與估算溫度之結果比較，溫度場估算與量測溫度非常接近，且由圖 7 與圖 10 結果比較可知，最高溫度相差極大範圍下，以相同精度之熱電偶量測溫度結果，本法仍可精確估算出溫度狀態，並估算未知時變噴流熱通量，由圖 8 與圖 11 估算噴流熱通量結果比較可驗證本法估算能力非常快速精確，且在估算時變參數脈衝越大時，為求估算正確，減小估算遲滯，程序雜訊變異量必須適當選取。

由以上三個運算例子看出，程序雜訊較大造成線上估算產生較大之震盪但估算反應快速，可示待估時變參數性質而作調和，量測雜訊與選定熱電偶精度有關，精度較高之熱電偶，可

增加線上估算之精確度但成本增加，一但選取熱電偶確定後，搭配適當程序雜訊變異量，適應性輸入估測法結合有限元素法將可對時變噴流熱通量進行準確的線上逆向估算。

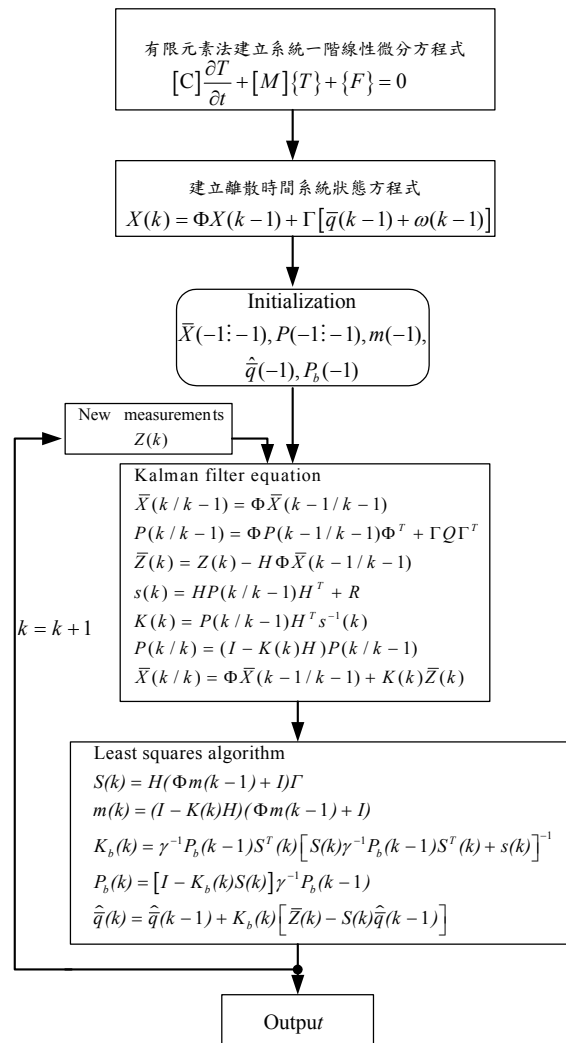


圖 2. 估算流程圖。

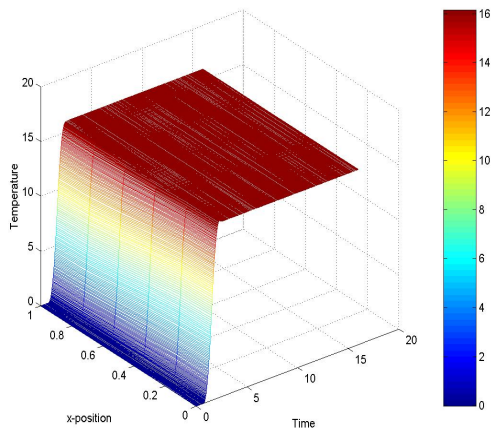


圖 3. 輸入三角波型噴流熱通量溫度場估算結果。

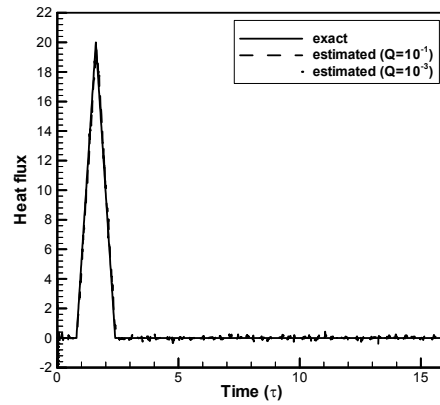


圖 5. 輸入三角波型噴流熱通量估算結果 (量測誤差 $\sigma = 0.01$)。

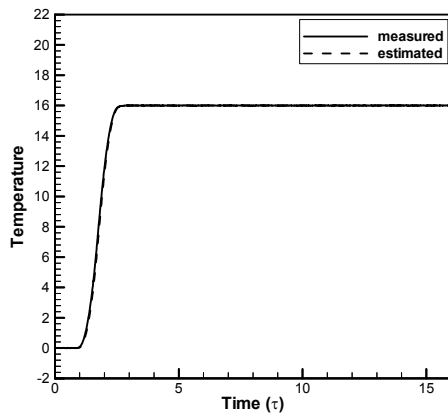


圖 4. 輸入三角波型噴流熱通量估算溫度與量測溫度比較 (量測誤差 $\sigma = 0.01$)。

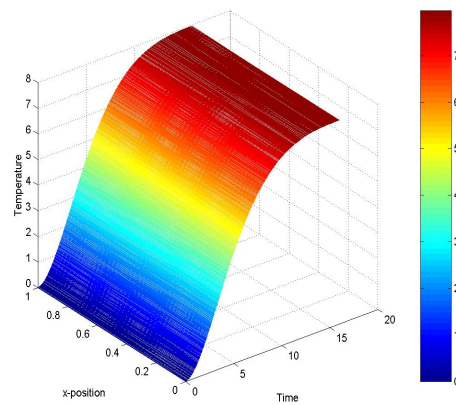


圖 6. 輸入正弦波型噴流熱通量溫度場估算結果。

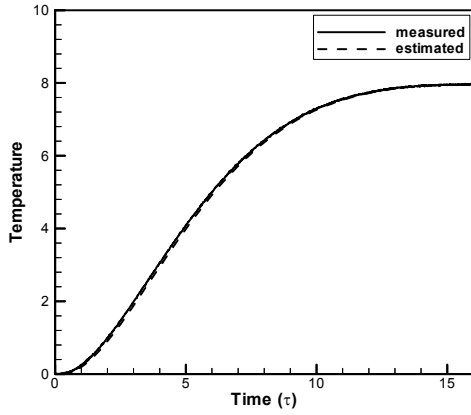


圖 7. 輸入正旋波型噴流熱通量估算溫度與量測溫度比較 (量測誤差 $\sigma = 0.01$)。

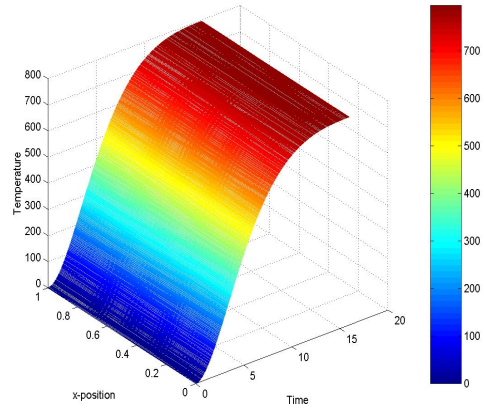


圖 9. 輸入正旋波型噴流熱通量溫度場估算結果。

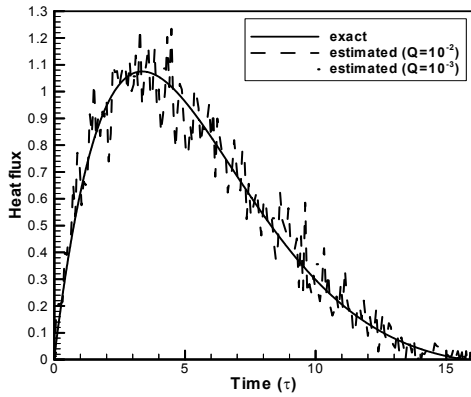


圖 8. 輸入正旋波型噴流熱通量估算結果 (量測誤差 $\sigma = 0.01$)。

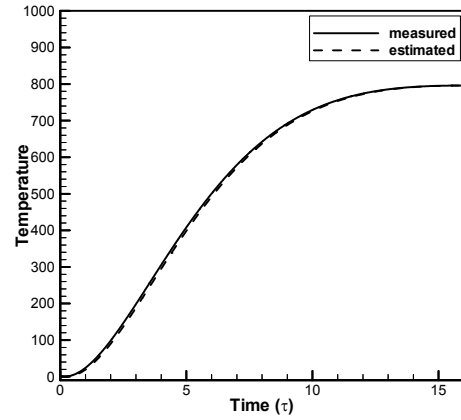


圖 10. 輸入正旋波型噴流熱通量估算溫度與量測溫度比較 (量測誤差 $\sigma = 0.01$)。

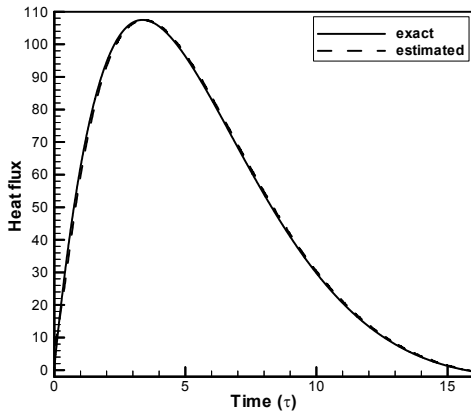


圖 11. 輸入正旋波型噴流熱通量估算結果(量測誤差 $\sigma = 0.01$)。

五、結論

適應性輸入估測法結合有限元素法對於瞬間時變之噴流熱通量進行線上逆向估算，遞迴式計算結構簡單，不需量測整批溫度數據，減少大量計算負荷，本文以模擬實驗方式驗證結果，本法可快速反應並精確估算未知噴流熱通量，將可提供未來甲板防火塗料厚度設計及飛彈推進劑燃燒釋放噴流熱通量之逆估算，結合有限元素法對於幾何邊界處理更為方便準確，對未來不規則形狀物體或復合材料之逆向熱傳導問題研究將有所助益，未來將對二維座標及非線性逆向熱傳導問題研究並結合實驗驗證。

誌謝

本研究承蒙國科會經費支助 NSC93-2212-E-014-009，特此感謝。

符號說明

英文字母

$[B]$	梯度矩陣
$[C]$	整體熱容矩陣
$[D]$	熱傳導係數矩陣

E	分割元素總數
$\{F\}$	熱輸入向量
$\{ff\}$	係數向量
H	量測矩陣
I	單位矩陣
J	等效函數
K	卡爾曼增益
K_s	熱傳導係數 ($W/m-^{\circ}C$)
K_b	校正增益
k	時間(離散化)
L	擋板厚度
m	敏感矩陣
$[M]$	整體熱傳導矩陣
n	節點數
$[N]$	形狀函數矩陣
P	濾波器誤差共變異量 矩陣
P_b	誤差共變異量矩陣
Q	程序雜訊變異量
q	熱通量
\bar{q}	無因次熱通量
\hat{q}	無因次熱通量之估算 值
R	量測雜訊變異量
S	敏感矩陣
s	剩餘值變異量
t	時間(sec)
T	溫度($^{\circ}C$)
T_0	初始溫度($^{\circ}C$)
T_{∞}	環境周圍溫度($^{\circ}C$)
\bar{T}	無因次溫度
v	量測雜訊向量
x	空間座標
\bar{x}	無因次空間座標
Z	量測溫度向量

\hat{Z}	量測溫度與估算溫度 誤差
\bar{Z}	量測無因次溫度向量
希臘字母	
γ	權重因子
α	熱擴散係數
ω	程序雜訊輸入向量
Γ	輸入矩陣
δ	Kronecker delta 函數
Φ	狀態轉移矩陣
Ψ	係數矩陣
Ω	係數矩陣
τ	無因次時間
$\Delta\tau$	無因次取樣時間

參考文獻

- [1] Giedt, W. H., "The Determination of Transient Temperatures and Heat Transfer at a Gas-Metal Interface Applied to a 40-mm Gun Barrel," *Jet Propulsion*, Vol. 25, pp. 158-162, 1955.
- [2] Stolz, Jr. G., "Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 82, pp. 20-26, 1960.
- [3] Scott, E. P., and J. V., Beck, "Analysis of Order of The Sequential Regularization Solutions of Inverse Heat Conduction Problem," *Trans. ASME*, Vol. 111, pp.218-224, 1989.
- [4] Tikhonov, A. N. and V. Y. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, V. H. Winston and Sons, Washington, D. C., 1977.
- [5] Miller, K., "Least Squares Methods for Ill-Posed Problems with a Prescribed bound," *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 1, No. 1, pp.52-74, 1970.
- [6] Alifanov, O. M. and Artyukhin, E. A., "Regularized Numerical Solution of Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem," *Journal of Engineering Physics*, Vol. 29, No. 1, 1975.
- [7] Huang, C. H. and Ozisik, M. N., "Inverse Problem of Determining Unknown Wall Heat Flux in Laminar Flow Through a Parallel Plat Duct," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 21, pp.55-70, 1992.
- [8] Tuan, P. C., "The Estimation of Thermal Unknown Functions by Solving Two Dimensional Inverse Heat Conduction Problems," Ph. D. Dissertation, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, North Carolina State University, Raleigh, U. S. A., 1991.
- [9] Alifanov, O. M. and Millhailov, V. V., "Solution of the Nonlinear Inverse Thermal Conducting Problem by the Iteration Method," *Journal of Engineering Physics*, Vol. 35, No. 6, pp.1501-1506, 1978.
- [10] Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *ASME Journal of Basic Engineering, Series 82d*, pp.35-45, 1960.
- [11] Chan, Y. T., Hu, A. C., and Plant, J. B., "A Kalman Filter Based Tracking Scheme with Input Estimation," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 15, pp. 237-242, 1979.
- [12] Bogler, T. L., "Tracking a Maneuvering Target Using Input Estimation," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 23,

- pp. 298-303, 1987.
- [13] Meng, H. H., Aircraft Maneuver Detection Using an Adaptive Kalman Filter, Naval Postgraduate School, Monterey, 1989.
- [14] Scarpa, F. and Milano, G., “Kalman Smoothing Technique Applied to the Inverse Heat Conduction Problem,” Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 28, pp. 79-96, 1995.
- [15] Tuan, P. C., Fong, L. W., and Huang, W. T., “Analysis of On-Line Inverse Heat Conduction Problems,” Journal of Chung Cheng Institute of Technology, Vol. 25, No.1, pp. 59-73, 1996.
- [16] Tuan, P. C., Ji, C. C., Fong, L. W., and Huang, W. T., “An Input Estimation Approach to On-line Two Dimensional Inverse Heat Conduction Problems,” Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 29, pp. 345-363, 1996.
- [17] Tuan, P. C., Fong, L. W., and Huang, W. T., “Application of Kalman Filtering with Input Estimation Technique to On-Line Cylindrical Inverse Heat Conduction Problems,” JSME International Journal, Series B, Vol. 40, No. 1, pp.126-133, 1997.
- [18] Segerlind, L. J., Applied Finite Element Analysis, East Lansing, Michigan, 1976.
- [19] Jazwinski, A. H., Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, New York, 1970.
- [20] Tuan, P. C. and Hou, W. T., “The Adaptive Robust Weighting Input Estimation for 1-D Inverse Heat Conduction Problem,” Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 34, pp.419-436, 1998.