

六加速儀機制之加速度輸出分析與失效補償法則建立之研究

陳聰堅* 李永隆* 張惠珍** 紀慶嘉***

*國防大學中正理工學院兵器工程學系

**大華技術學院電子工程學系

***清雲科技大學機械工程學系

摘 要

六加速儀慣性導航系統(Inertia Navigation System, INS)，係將六個加速儀經適當的機制組合，於運算後可得載具的航向、航速、位置與姿態，並可用以取代傳統的 INS。本文透過向量分析方法推導結果發現在六加速儀機制中，其四面體任一面的三顆加速儀的每一顆加速度輸出，均為其它二顆加速儀加速度輸出的向量組合。本文即依此關係建立出在六加速儀機制中，當部分加速儀失效時的補償法則，並發現當任意一顆或二顆以及在某一特定條件下的三顆加速儀失效時，其加速度輸出值，均可由其它功能正常的加速儀加速度輸出值予以補償，此為本文首先發現之無陀螺儀慣性導航系統於導航過程中，可進行若干加速儀失效補償的另一項優點。經模擬結果可證明所提方法的正確性，並可有效提升六加速儀慣性導航系統在實際應用上的可靠度。

關鍵字：六加速儀、慣性導航系統

Acceleration Output Analysis of Six Accelerometer Mechanism and the Compensate Algorithm for Accelerometers Breakdown

Tsung-Chien Chen*, Yung-Lung Lee*, Hui-Chen Chang**,
and Ching-China Ji***

*Department of System Engineering, Chung Cheng Institute of Technology,
National Defense University

**Department of Electronics Engineering, Ta Hwa Institute of Technology

***Department of Mechanic Engineering, Ching Yun University

ABSTRACT

The Gyroscope-free inertial navigation system can measure the direction, velocity and position of a vehicle, after a suitable configuration and mechanization. In this paper, according to the vectors analysis of the six accelerometer's outputs of acceleration, we find that anyone of these three accelerometers' outputs of acceleration was the vectors combination of another two outputs of acceleration in that co-planarity triangle. And when any one, two or three accelerometers breakdown at some restricts situations, it always can be compensated from the regular accelerometers. From this reason, we proposed a compensated scheme when some accelerometers black-down. It is another advantage of Gyroscope-free inertial navigation system that we first discover within this paper. The correctness can be verified by the numerical simulation result. Therefore, the compensated schemes can enhance the reliability of Gyroscope-free inertial navigation system at real applications.

Keywords: six accelerometers, INS

一、前言

無陀螺儀慣性導航系統(Gyro-Free INS)，係僅由加速儀組成之慣性導航系統。其作用原理係於載具運動時，透過加速儀所感測之比力(Specific Force)值，再經由導航方程式運算而獲得載具的位置、速度、姿態等資訊。此原理源溯 1967 年由 Schuler, Grammatikos 與 Fegler 等三位學者最早提出[1]，唯其至少需使用九顆加速儀方能計算出載具的加速度與角速度，始可取代傳統慣性導航系統；直至 1994 年由 Chen 等三位學者所提出之六加速儀機制中[2]，因僅需利用六個加速儀即可完全取代陀螺儀之慣性導航系統，而使加速儀數量更為精簡。另有關於全加速儀機制之硬品實現研究上，Kirill 運用六加速儀理論，設計一組慣性導航機制，並探討誤差對導航影響 [3]。而在六加速儀理論應用上，Lee 等人已研究利用六加速儀機制，藉由重力指示，解決初始姿態角問題[4]，並提出六加速儀機制校準(Calibration)方法[5]，以增進導航精度。

由於六加速儀慣性導航系統不同於傳統 INS 無需使用陀螺儀，其優點為具對稱性，構型簡潔精緻、體積小與價格便宜、可承受較大 G 值，並可量測高動態目標的位置、速度、加速度及姿態不受到外界干擾等；此外，在傳統 INS 對於其感測元件失效的預防作法上，係於載具上裝置二組感測元件以確保當一組感測元件失效時可由另一組感測元件來維持其 INS 系統正常運作，此作法雖可提高系統的可靠度外，但其系統的製造成本亦相對的提高。而在無陀螺儀慣性導航系統的失效補償問題研究上尚未獲得討論，因此，本文為進一步探討無陀螺儀慣性導航系統之優點，即透過 Chen 等[2]所提之六加速儀機制，經由向量分析方法找出

六加速儀機制中每一顆加速儀加速度輸出之關係，並依此關係建立部分加速儀失效時之補償法則，據此可提高無陀螺儀慣性導航系統的可靠性。此為本文在無陀螺儀慣性導航系統的研究上所發現的另一重大的優點。

本文計分五部分探討六加速儀慣性系統加速度輸出分析與加速儀失效時之補償法則。第一，六加速儀理論回顧，介紹六加速儀導航方程式；第二，透過向量分析方法推導出六加速儀機制中各加速儀加速度輸出之關係；第三，經由所推導出之加速儀加速度輸出關係，據以建立部分加速儀失效時之補償法則；第四，以數值模擬方法驗證所提理論之正確性；第五，依據模擬結果作一討論並歸納結果。

二、六加速儀理論

2.1 六加速儀方程式

依 Chen 所提之六加速儀機制[2]，考慮一邊長為 2ρ 之正立方體，則六加速儀配置如圖 1 所示，加速儀感測軸位於立方體表面之對角線上，連接這些對角線恰成一正四面體，四個頂點為 A, B, C, D 。加速儀之位置分置於四面體每一邊之中點，與六加速儀機制中心點距離 ρ 。

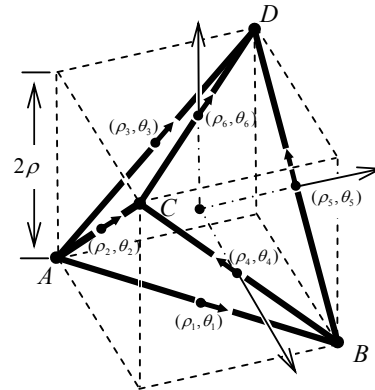


圖 1. 六加速儀基本機制組合與感測方向示意圖。

由圖 1 知每一加速儀位置及感測方向如表 1。

表 1. 六加速儀機制編號、位置向量及感測軸單位向量

加速儀編號	加速儀位置向量	感測軸單位向量
1	$\rho_1 = [0 \ 0 \ -\rho]^T$	$\theta_1 = 1/\sqrt{2}[1 \ 1 \ 0]^T$
2	$\rho_2 = [0 \ -\rho \ 0]^T$	$\theta_2 = 1/\sqrt{2}[1 \ 0 \ 1]^T$
3	$\rho_3 = [-\rho \ 0 \ 0]^T$	$\theta_3 = 1/\sqrt{2}[0 \ 1 \ 1]^T$
4	$\rho_4 = [\rho \ 0 \ 0]^T$	$\theta_4 = 1/\sqrt{2}[0 \ -1 \ 1]^T$
5	$\rho_5 = [0 \ \rho \ 0]^T$	$\theta_5 = 1/\sqrt{2}[-1 \ 0 \ 1]^T$
6	$\rho_6 = [0 \ 0 \ \rho]^T$	$\theta_6 = 1/\sqrt{2}[-1 \ 1 \ 0]^T$

表 1 中 θ_j 表第 j 類加速儀感測方向之單位向量， ρ_j 表六加速儀機制中心至第 j 類加速儀位置單位向量。而此六加速儀機制方程式可示表成矩陣形式

$$A = [\rho S^T \quad T^T] \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ib}^b \\ \vdots \\ C_i^b \ddot{r}^i \end{bmatrix} - \rho T^T \omega^2 \quad (1)$$

其中 \ddot{r} 為線加速度向量， $\dot{\omega}_{ib}^b$ 為角加速度向量， $A = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6]^T$ 為加速度矩陣，

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 為位置矩陣，}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 為方向矩陣，}$$

$$\omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \text{ 為向心加速度矩陣。}$$

ω_x 、 ω_y 與 ω_z 分別為載具 x, y 與 z 三個軸向的角速度。

(1)式移項整理後可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ib}^b \\ C_i^b \ddot{r}^i \end{bmatrix} = [\rho S^T \quad T^T]^{-1} (A + \rho T^T \omega^2) \quad (2)$$

其中 $[\rho S^T \quad T^T]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S/\rho \\ T \end{bmatrix}$ 代入(2)式展開獲得六

加速儀機制方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ib}^b \\ C_i^b \ddot{r}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S/\rho \\ T \end{bmatrix} A + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.2 六加速儀機制計算流程

依據(3)式求出角加速度 $\dot{\omega}_{ib}^b$ ，經積分後求得角速度 ω_{ib}^b ，並可求得不同時間之方向餘弦轉換矩陣 C_i^b 及六加速儀機制相對慣性座標加速度 $C_i^b \ddot{r}^i$ ，將所求得加速度經座標轉換後，求得相對慣性座標加速度 \ddot{r}^i 。其作業流程如圖 2 所示 [5]。

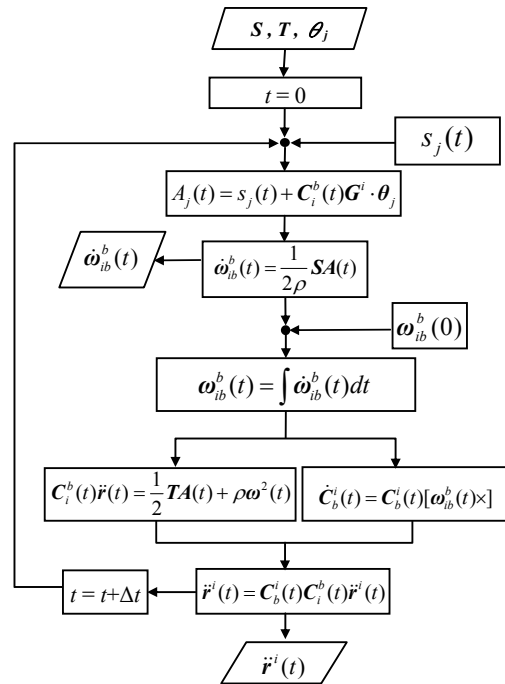


圖 2. 六加速儀機制運算流程圖。

三、六加速儀加速度輸出關係之推導

由圖 2 之加速儀機制運算流程中可知，當各加速儀所感測到的比力 s_j 經過運算後，可得加速度輸出矩陣 A 。如果在六加速儀中的第 j 類加速儀失效時，即代表此類加速儀沒有比力輸出值 s_j ，亦即表示我們無法正確獲得第 j 類加速儀相對於慣性座標加速度值 A_j ，如此對六加速儀最後的整體演算結果，將會產生誤差。因此，我們試圖透過 Chen 所提之六加速儀在空間中的配置方式，找出加速度輸出矩陣 A 各分量之幾何關係，期能利用功能正常之加速儀，透過幾何關係運算來補償失效加速儀之輸出，俾使六加速儀機制能正常運作。

3.1 加速度輸出矩陣各分量之幾何關係

Chen 的六加速儀機制係將加速儀配置於正四面體六個邊的中點，由線性相依判別式

$$\det[\theta_p \ \theta_q \ \theta_r] = 0, \quad p \neq q \neq r$$

可知在四面體任一平面的三個加速儀感測軸單位向，量均為線性相依的關係。此外，四面體中的每個面均為正三角形。因此，各加速儀感測軸的單位向量在每個正三角形邊上所存在的線性相依關係如表 2 所示。

表 2. 六加速儀感測軸單位向量之關係式

$\theta_1 = \theta_2 - \theta_4$	$\theta_1 = \theta_3 - \theta_5$
$\theta_2 = \theta_3 - \theta_6$	$\theta_2 = \theta_1 + \theta_4$
$\theta_3 = \theta_2 + \theta_6$	$\theta_3 = \theta_1 + \theta_5$
$\theta_4 = \theta_5 - \theta_6$	$\theta_4 = \theta_2 - \theta_1$
$\theta_5 = \theta_4 + \theta_6$	$\theta_5 = \theta_3 - \theta_1$
$\theta_6 = \theta_5 - \theta_4$	$\theta_6 = \theta_3 - \theta_2$

我們在此將(1)式中的方向矩陣 T 表示如下：

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} [T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid T_4 \mid T_5 \mid T_6] \quad (4)$$

由於六加速儀感測軸的單位向量即為(1)式中的方向矩陣 T 。因此，根據表 2，方向矩陣中的各元素亦有下列關係(表 3)。

表 3. 六加速儀方向矩陣之關係式

$T_1 = T_2 - T_4$	$T_1 = T_3 - T_5$
$T_2 = T_3 - T_6$	$T_2 = T_1 + T_4$
$T_3 = T_2 + T_6$	$T_3 = T_1 + T_5$
$T_4 = T_5 - T_6$	$T_4 = T_2 - T_1$
$T_5 = T_4 + T_6$	$T_5 = T_3 - T_1$
$T_6 = T_5 - T_4$	$T_6 = T_3 - T_2$

此外，我們將位置矩陣 S 表示為

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} [s_1 \mid s_2 \mid s_3 \mid s_4 \mid s_5 \mid s_6] \quad (5)$$

由(1)式之位置矩陣 S ，可得六加速儀位置向量之幾何關係(表 4)。

表 4. 六加速儀位置矩陣之幾何關係式

$s_1 = s_2 - s_4 + [2 \ -2 \ -2]^T$	$s_1 = s_3 - s_5 + [2 \ -2 \ 2]^T$
$s_2 = s_3 - s_6 + [-2 \ -2 \ 2]^T$	$s_2 = s_1 + s_4 + [-2 \ 2 \ 2]^T$
$s_3 = s_2 + s_6 + [2 \ 2 \ -2]^T$	$s_3 = s_1 + s_5 + [-2 \ 2 \ -2]^T$
$s_4 = s_5 - s_6 + [-2 \ -2 \ -2]^T$	$s_4 = s_2 - s_1 + [2 \ -2 \ -2]^T$
$s_5 = s_4 + s_6 + [2 \ 2 \ 2]^T$	$s_5 = s_3 - s_1 + [2 \ -2 \ 2]^T$
$s_6 = s_5 - s_4 + [-2 \ -2 \ -2]^T$	$s_6 = s_3 - s_2 + [-2 \ -2 \ 2]^T$

依據(4)與(5)式，可將(1)式改寫如下

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\rho/\sqrt{2})S_1^T & T_1^T \\ (\rho/\sqrt{2})S_2^T & T_2^T \\ (\rho/\sqrt{2})S_3^T & T_3^T \\ (\rho/\sqrt{2})S_4^T & T_4^T \\ (\rho/\sqrt{2})S_5^T & T_5^T \\ (\rho/\sqrt{2})S_6^T & T_6^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_b^b \\ \dot{r}^i \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \\ T_3^T \\ T_4^T \\ T_5^T \\ T_6^T \end{bmatrix} \omega^2 \quad (6)$$

將表 3 及表 4 之值代入(6)式，則可得六加速儀加速度矩陣 A 各分量關係式如表 5。

表 5. 六加速儀加速度矩陣各分量之關係

$A_1 = A_{11} + B_{11}\dot{\omega}_{ib}^b$	$A_1 = A_{12} + B_{12}\dot{\omega}_{ib}^b$
$A_2 = A_{21} + B_{21}\dot{\omega}_{ib}^b$	$A_2 = A_{22} + B_{22}\dot{\omega}_{ib}^b$
$A_3 = A_{31} + B_{31}\dot{\omega}_{ib}^b$	$A_3 = A_{32} + B_{32}\dot{\omega}_{ib}^b$
$A_4 = A_{41} + B_{41}\dot{\omega}_{ib}^b$	$A_4 = A_{42} + B_{42}\dot{\omega}_{ib}^b$
$A_5 = A_{51} + B_{51}\dot{\omega}_{ib}^b$	$A_5 = A_{52} + B_{52}\dot{\omega}_{ib}^b$
$A_6 = A_{61} + B_{61}\dot{\omega}_{ib}^b$	$A_6 = A_{62} + B_{62}\dot{\omega}_{ib}^b$

表中

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_2 - A_4 & A_{12} &= A_3 - A_5 \\ A_{21} &= A_3 - A_6 & A_{22} &= A_1 + A_4 \\ A_{31} &= A_2 + A_6 & A_{32} &= A_1 + A_5 \\ A_{41} &= A_5 - A_6 & A_{42} &= A_2 - A_1 \\ A_{51} &= A_4 + A_6 & A_{52} &= A_3 - A_1 \\ A_{61} &= A_5 - A_4 & A_{62} &= A_3 - A_2 \\ B_{11} &= \sqrt{2}\rho[1 \ -1 \ -1] & B_{12} &= \sqrt{2}\rho[1 \ -1 \ 1] \\ B_{21} &= \sqrt{2}\rho[-1 \ -1 \ 1] & B_{22} &= \sqrt{2}\rho[-1 \ 1 \ 1] \\ B_{31} &= \sqrt{2}\rho[1 \ 1 \ -1] & B_{32} &= \sqrt{2}\rho[-1 \ 1 \ -1] \\ B_{41} &= \sqrt{2}\rho[-1 \ -1 \ -1] & B_{42} &= \sqrt{2}\rho[1 \ -1 \ -1] \\ B_{51} &= \sqrt{2}\rho[1 \ 1 \ 1] & B_{52} &= \sqrt{2}\rho[1 \ -1 \ 1] \\ B_{61} &= \sqrt{2}\rho[-1 \ -1 \ -1] & B_{62} &= \sqrt{2}\rho[-1 \ -1 \ 1] \end{aligned}$$

由圖 2 及表 5 可知，當某一加速儀失效時，

則我們無法獲得其比力輸出值 s_a ，亦即我們無法求得其加速度輸出值 A_a 。此時我們可透過其共平面的另外兩顆功能正常的加速儀所量得的輸出值 s_b 與 s_c ，經過運算後可求得 A_b 與 A_c ($a \neq b \neq c$)，再利用表 5 關係式求得 A_a 。此時即可得到完整的加速度矩陣 A ，並可繼續執行圖 2 的計算流程。

四、加速儀失效補償與演算法則建立

4.1 六加速儀失效補償法則之建立

由前述推導結果(如表 5)可知在 Chen 所配置之六加速儀機制中，若有一顆加速儀失效時，均可由其兩組共平面(每個加速儀均位於兩平面的交線上)的兩個加速儀的加速度值 A_j 予以組合，並修正角加速度的影響後，即可獲得補償後的運算流程。據此，我們進一步探討六加速儀機制中，失效加速儀的補償法則及其限制。

1. 當六加速儀中有一顆加速儀失效時，則可任意由其兩組共平面之兩個功能正常加速儀的輸出值，透過運算予以補償。
2. 當六加速儀中任意兩顆加速儀同時失效時，可在失效加速儀所在的兩個共平面上，選擇其中一個共平面中兩顆均功能正常的加速儀輸出值，透過運算予以補償(例：當編號 1 與 2 的加速儀失效時，則可由編號 3 與編號 5 之加速儀來補償編號 1 的加速儀；另由編號 3 與編號 6 之加速儀來補償編號 2 的加速儀)。
3. 當六加速儀中任意三顆加速儀同時失效時：此時會有三種不同的情況：
 - (1) 當三顆失效的加速儀共平面時：則可由

- 各失效加速儀所在的另一共平面的兩顆功能正常的加速儀之輸出值，透過運算予以補償（例：當編號 1、2 與 4 的加速儀同時失效時，則可由編號 3 與編號 5 的加速儀來補償編號 1 的加速儀；由編號 3 與編號 6 的加速儀來補償編號 2 的加速儀，另由編號 5 與編號 6 的加速儀來補償編號 4 的加速儀）。
- (2) 當三顆失效的加速儀位於四面體某一共頂點的三個邊線上時：則此三顆加速儀均無法透過其他功能正常的加速儀獲得補償（例：當編號 3、6 與 5 的加速儀同時失效時，則均無法透過編號 1、2 與 4 的加速儀予以補償）。
 - (3) 當二顆共平面加速儀與另一顆不與前述二顆共平面且不位於共一頂點邊線上的加速儀同時失效時：則需先補償此非共平面的失效加速儀後，再進行補償兩顆共平面之加速儀（例：當編號 4、5 與 3 加速儀同時失效時，則需先由由編號 2 與編號 6 之加速儀來補償編號 3 之加速儀，再由補償後的編號 3 及功能正常的編號 1 補償編號 5 加速儀，然後由功能正常之編號 2 與編號 1 之加速儀來補償編號 4 之加速儀）。
 4. 當四顆（含）以上的加速儀同時失效時，則無法透過另外二顆功能正常的加速儀予以補償。
 5. 由(17)式可知，在進行失效加速儀補償運算時，當時的角加速度值 ω_{ib}^b 必須為已知。因此，若於載具啟動前或實施直線運動或等角速度運動中（無角加速度運動）即知加速儀失效時，則可設定其初始角的加速度值為零；若載具在進行某一角加速度運動中而發現加速儀失效時，則可依失效時之前一刻狀態的角加速度值代入運算。在此特別強調，由上述的補償演算法則則可能會因初始角加速度給定時之精確性而會有不同的誤差累積結果，但如果載具不是進行角加速度運動時，則不會有前述誤差累積之現象。
- 由上述說明，以編號 1 為例：可將加速儀失效時的補償流程建立如下（圖 3）。

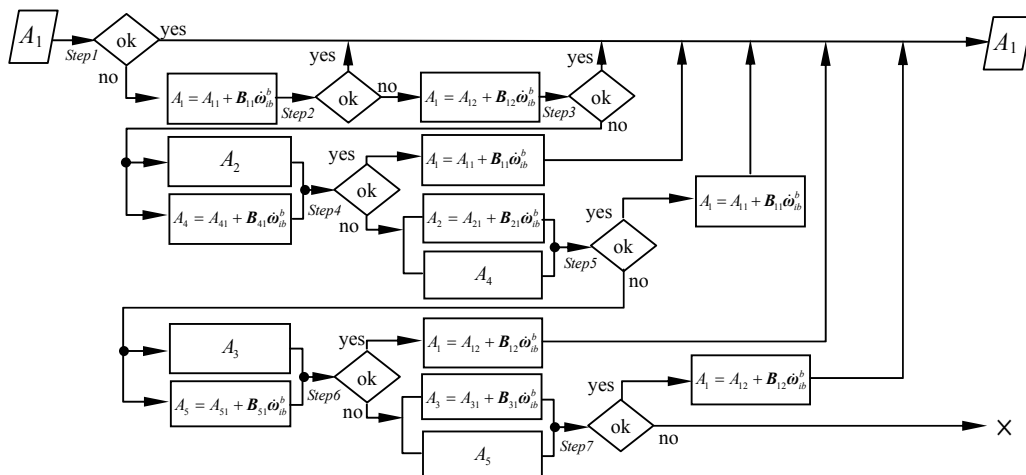


圖 3. 編號 1 加速儀失效時的補償流程圖。

圖中決策方塊係判別加速儀是否正常；以編號 1 加速儀失效時之補償流程為例：每一個決策過程均可視為一個步驟，因此可視六加速儀失效個數，最多可進行七個步驟。每個步驟之執行方式說明如下：

1. 步驟一：

當編號 1 加速儀功能正常時，則其輸出即為 A_1 ；若失效則進行步驟二。

2. 步驟二：

當編號 1 加速儀失效時，則由編號 2 與 4 加速儀實施補償，並判定編號 2 與 4 之加速儀是否正常，若編號 2 與 4 加速儀功能均正常，則進行補償運算。若編號 2 與 4 加速儀中有一顆或二顆同時失效，則進行步驟三。

3. 步驟三：

當編號 2 與 4 加速儀中有一顆或二顆同時失效時，則由編號 3 與 5 加速儀實施補償，並判定編號 3 與 5 之加速儀是否正常，若編號 3 與 5 加速儀功能均正常，則進行補償運算。若編號 3 與 5 加速儀中有一顆或二顆同時失效，則進行步驟四。

4. 步驟四：

在步驟二中我們已知編號 2 與 4 加速儀中有一顆或二顆同時失效，在此先假設編號 4 加速儀失效，則先由編號 5 與 6 對編號 4 加速儀進行補償運算後可得 A_4 ，此時若編號 2、5 與 6 加速儀被判定功能正常，則 A_1 可由 A_2 與補償運算後得之 A_4 進行補償運算，若編號 2 或 5 或 6 被判定失效，則進行步驟五。

5. 步驟五：

在步驟二中我們已知編號 2 與 4 加速儀中有一顆或二顆同時失效，在此則再假設編號 2 加速儀失效，則先由編號 3 與 6 對編號 2 加速儀進行補償運算後可得 A_2 ，此時若編號 4、3 與 6 加速儀被判定功能正常，則 A_1 可由 A_4 與補償運算後得之 A_2 進行補償運算，

若編號 4 或 3 或 6 被判定失效，則進行步驟六。

6. 步驟六：

在步驟三中我們已知編號 3 與 5 加速儀中有一顆或二顆同時失效，在此先假設編號 5 加速儀失效，則先由編號 4 與 6 對編號 5 加速儀進行補償運算後可得 A_5 ，此時若編號 3、4 與 6 加速儀被判定功能正常，則 A_1 可由 A_3 與補償運算後得之 A_5 進行補償運算，若編號 3 或 4 或 6 被判定失效，則進行步驟七。

7. 步驟七：

在步驟三中我們已知編號 3 與 5 加速儀中有一顆或二顆同時失效，在此則再假設編號 3 加速儀失效，則先由編號 2 與 6 對編號 3 加速儀進行補償運算後可得 A_3 ，此時若編號 5、2 與 6 加速儀被判定功能正常，則由 A_5 與補償運算後得之 A_3 進行補償運算，若編號 5 或 2 或 6 被判定失效，則 A_1 無法再進行補償運算，亦即六加速儀機制將完全失效。

由上述說明，可以得知當編號 1 加速儀失效時，可視其他編號加速儀失效狀況，最多可獲得六種補償方式。同理，而當其他編號加速儀失效時，其補償方法與步驟均與上述七個步驟相同。

4.2 六加速儀機制失效補償演算法則與驗證

由表 5 可知，在進行加速儀補償運算時，其角加速度值 $\omega_{ib}^b(t)$ 必須為已知。然而此時的角加速度值尚未獲得，為解決此問題，我們以前一個狀態的角加速度值 $\omega_{ib}^b(t-\Delta t)$ 代入計算，因此，由(3)式可將角加速度運算的方式改為

$$\omega_{ib}^b(t) = \frac{1}{2\rho} SA(t) = \frac{1}{2\rho} S \left\{ \begin{bmatrix} A_1^*(t) \\ A_2^*(t) \\ A_3^*(t) \\ A_4^*(t) \\ A_5^*(t) \\ A_6^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^* \\ B_2^* \\ B_3^* \\ B_4^* \\ B_5^* \\ B_6^* \end{bmatrix} \omega_{ib}^b(t-\Delta t) \right\}$$

$$= \frac{1}{2\rho} \mathbf{SA}^*(t) + \frac{1}{2\rho} \mathbf{SB}^* \dot{\omega}_{ib}^b(t - \Delta t) \quad (7)$$

式中 A_j^* 與 B_j^* ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 分別表示：若編號 j 加速儀失效，則 A_j^* 與 B_j^* 可用 A_{j1} 與 B_{j1} 或 A_{j2} 與 B_{j2} 表示(如表 5)；若加速儀未失效，則 $A_j^* = A_j$ 且 $B_j^* = [0 \ 0 \ 0]$ 。在此以編號 1 加速儀失效時為例，其加速度輸出值之補償替代值如表 6。

表 6. 編號 1、2 與 4 加速儀失效時角加速度運算參數

$A_1^*(t) = A_{12}$	$B_1^*(t) = B_{12}$
$A_2^*(t) = A_2$	$B_2^*(t) = [0 \ 0 \ 0]$
$A_3^*(t) = A_3$	$B_3^*(t) = [0 \ 0 \ 0]$
$A_4^*(t) = A_4$	$B_4^*(t) = [0 \ 0 \ 0]$
$A_5^*(t) = A_5$	$B_5^*(t) = [0 \ 0 \ 0]$
$A_6^*(t) = A_6$	$B_6^*(t) = [0 \ 0 \ 0]$

為驗證(7)式之正確性，可將表 6. 之值代入(7)式即可求得角加速度 $\dot{\omega}_{ib}^b$ 為

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ib,x}^b(t) \\ \dot{\omega}_{ib,y}^b(t) \\ \dot{\omega}_{ib,z}^b(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho} \begin{bmatrix} A_3 - A_2 - A_6 \\ A_5 - A_4 - A_6 \\ A_2 - A_3 - A_4 + A_5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ib,x}^b(t - \Delta t) \\ \dot{\omega}_{ib,y}^b(t - \Delta t) \\ \dot{\omega}_{ib,z}^b(t - \Delta t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

若所有加速儀均無失效時，可由(3)式求得 $\dot{\omega}_{ib}^b$ 為

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ib,x}^b(t) \\ \dot{\omega}_{ib,y}^b(t) \\ \dot{\omega}_{ib,z}^b(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho} \begin{bmatrix} A_1 - A_2 + A_5 - A_6 \\ -A_1 + A_3 - A_4 - A_6 \\ A_2 - A_3 - A_4 + A_5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

比較(8)式與(9)式可知，當編號 1 加速儀失效時僅影響 $\dot{\omega}_{ib,x}^b$ 與 $\dot{\omega}_{ib,y}^b$ 的計算，而不影響 $\dot{\omega}_{ib,z}^b$ 的計算。因此僅需以 A_3 、 A_5 、 $\dot{\omega}_{ib,x}^b(t + \Delta t)$ 與 $\dot{\omega}_{ib,y}^b(t + \Delta t)$ 對 $\dot{\omega}_{ib,x}^b$ 與 $\dot{\omega}_{ib,y}^b$ 進行補償運算。若載具之角加速度固定時則 $\dot{\omega}_{ib}^b(t) = \dot{\omega}_{ib}^b(t - \Delta t)$ ，因此可將(9)式代入(8)式之 $\dot{\omega}_{ib}^b(t - \Delta t)$ 項，並可將(8)式改寫為

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ib,x}^b(t) \\ \dot{\omega}_{ib,y}^b(t) \\ \dot{\omega}_{ib,z}^b(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho} \begin{bmatrix} A_3 - A_2 - A_6 \\ A_5 - A_4 - A_6 \\ A_2 - A_3 - A_4 + A_5 \end{bmatrix} + \frac{1}{4\sqrt{2}\rho} \begin{bmatrix} 2A_1 - 2A_3 + 2A_5 \\ -2A_1 + 2A_3 - 2A_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho} \begin{bmatrix} A_1 - A_2 + A_5 - A_6 \\ -A_1 + A_3 - A_4 - A_6 \\ A_2 - A_3 - A_4 + A_5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

比較(10)式與(9)式可知其運算結果相同，如此可證明本文所提出之補償運算式(7)式的正確性。而其他編號加速儀失效時之運算法則正確性均可由上述之運算流程獲得證明。在此特別強調，由上述的補償演算法則可能會因前後狀態之角加速度誤差情形而會有不同的誤差累積結果。而由上述說明可將三加速儀機制的運算流程修改圖 4 所示。

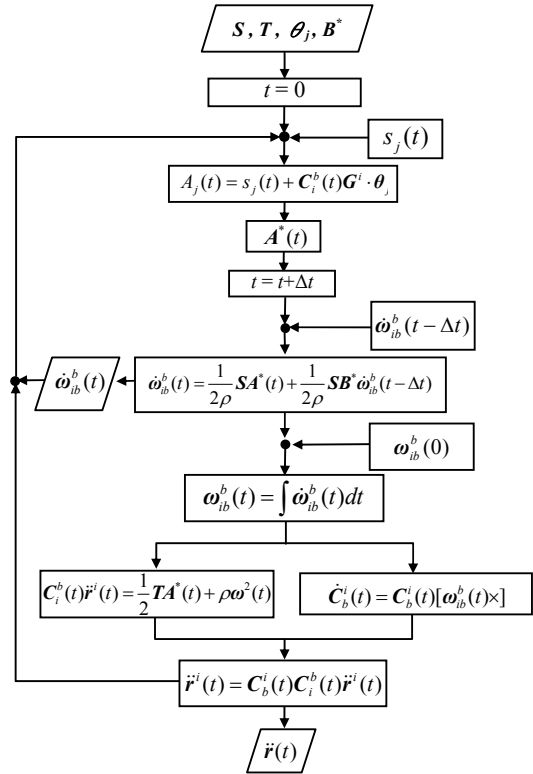


圖 4. 六加速儀機制失效補償之運算流程圖。

五、模擬與討論

為驗證本文所提之補償方法的功效，我們在此以不具角加速度及具角加速度之兩種實例下實施模擬，其條件設定說明如下：

1. 實例一：

設定條件為： $\rho = 0.1(m)$ ；線加速度值 $[9.81 \ 0 \ 0](m/s^2)$ ；角加速度值 $[0 \ 0 \ 0](rad/s^2)$ ；角速度值 $[\pi \ 0.2 \ 0.2](rad/s)$ ；重力加速度 $[0 \ 0 \ -9.8](m/s^2)$ ；並分別設定編號 1 加速儀失效(以編號 2 與 4 加速儀補償)、編號 1 與 2 加速儀失效(分別以編號 3 與 5 及編號 3 與 6 加速儀補償)及編號 1、2 與 4 加速儀失效(分別以編號 3 與 5、編號 3 與 6 及編號 5 與 6 加速儀補償)等三種狀況進行失效及補償模擬。其模擬結果如下：

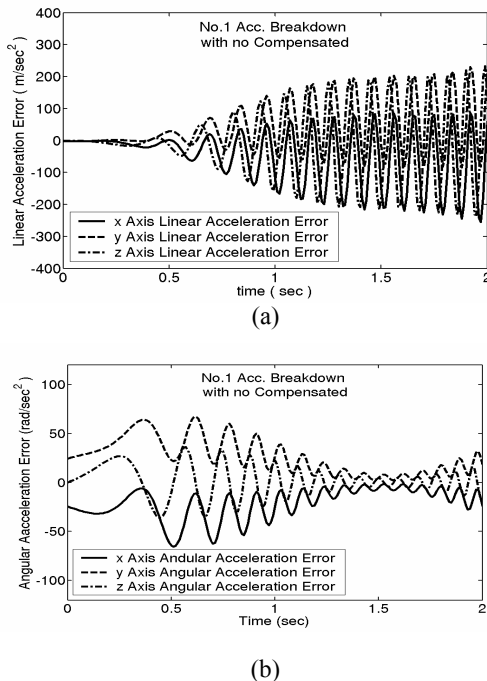


圖 5. 不具角加速度時編號 1 加速儀失效時;(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

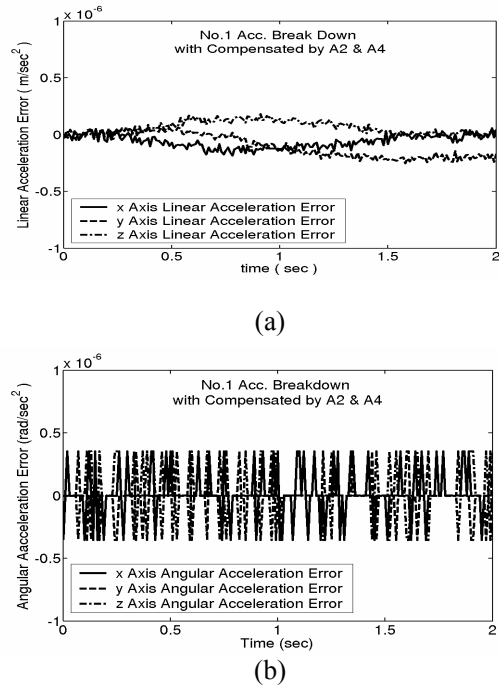


圖 6. 不具角加速度情況下編號 1 加速儀失效並於補償後;(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

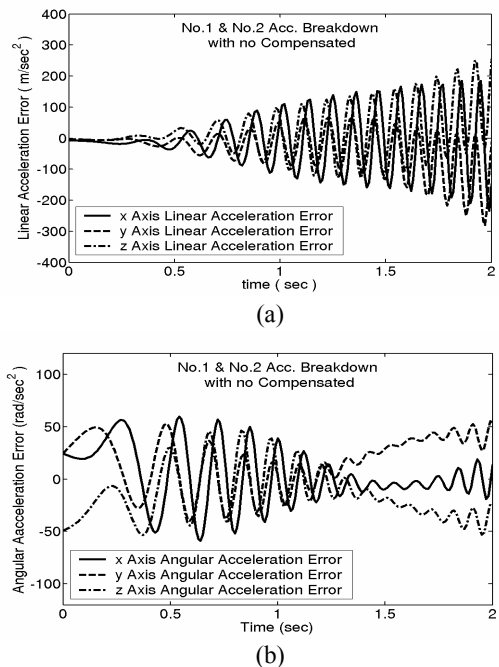
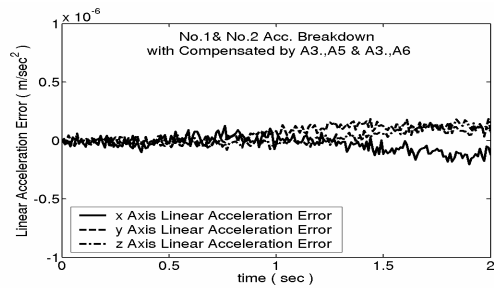
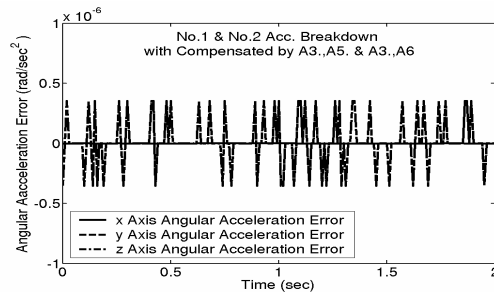


圖 7. 不具角加速度情況下編號 1 與 2 加速儀失效時;(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

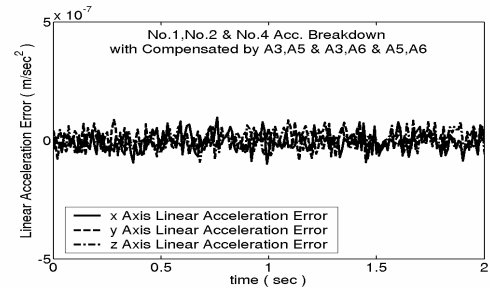


(a)

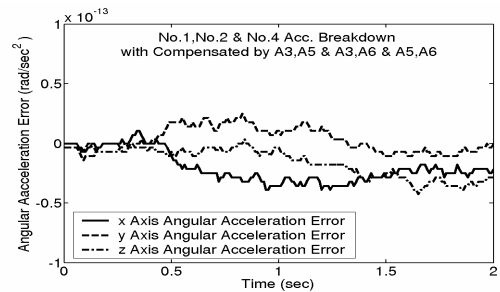


(b)

圖 8. 不具角加速度情況下編號 1 與 2 加速儀同時失效並於補償後(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

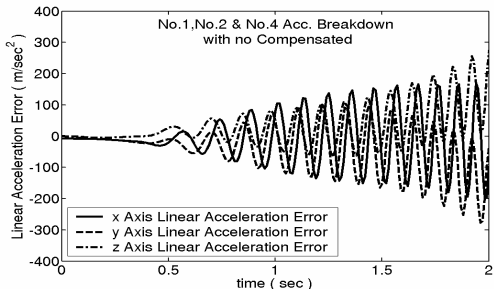


(a)

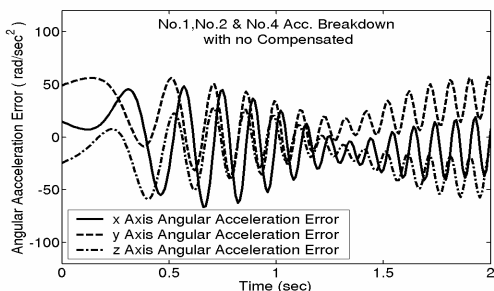


(b)

圖 10. 不具角加速度情況下編號 1、2 與 4 加速儀同時失效並於補償後；(a)線性加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。



(a)

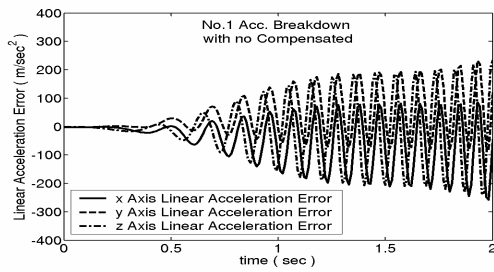


(b)

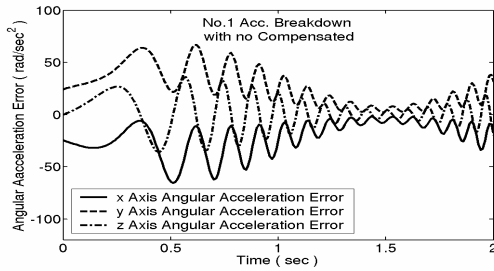
圖 9. 不具角加速度情況下編號 1、2 與 4 加速儀同時失效時；(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

2. 實例二：

設定條件為： $\rho = 0.1(m)$ ；線性加速度值 $[9.81 \ 0 \ 0](m/s^2)$ ；角加速度值 $[0.1 \ 0 \ 0](rad/s^2)$ ；角速度值 $[\pi \ 0.2 \ 0.2](rad/s)$ ；重力加速度 $[0 \ 0 \ -9.8](m/s^2)$ ；並分別設定編號 1 加速儀失效（以編號 2 與 4 加速儀補償）、編號 1 與 2 加速儀失效（分別以編號 3 與 5 及編號 3 與 6 加速儀補償）及編號 1、2 與 4 加速儀失效（分別以編號 3 與 5、編號 3 與 6 及編號 5 與 6 加速儀補償）等三種狀況進行失效及補償模擬。其模擬結果如下：

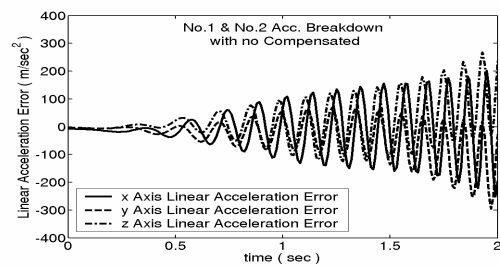


(a)

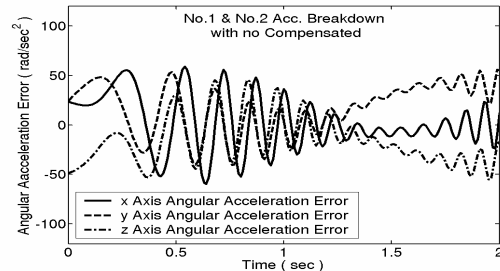


(b)

圖 11. 具角加速度之編號 1 加速儀失效時；(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

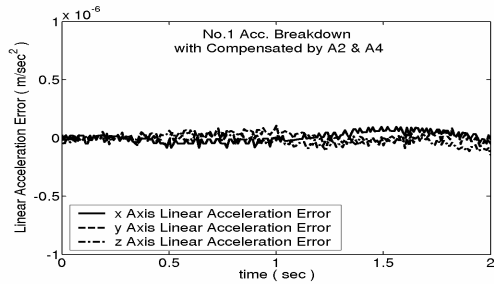


(a)

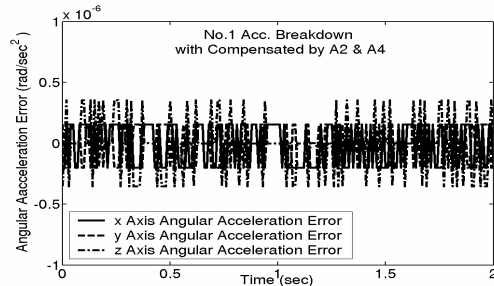


(b)

圖 13. 具角加速度情況下編號 1 與 2 加速儀同時失效時；(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

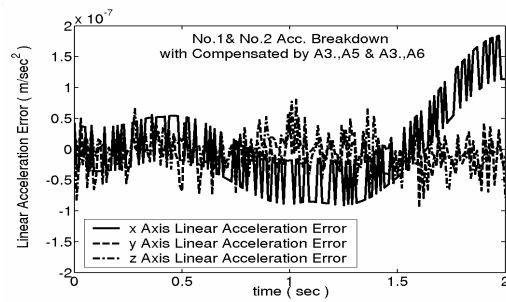


(a)

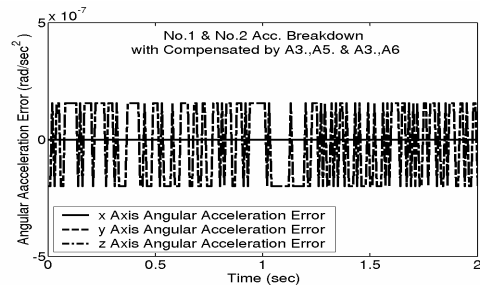


(b)

圖 12. 具角加速度情況下編號 1 加速儀失效並於補償後；(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

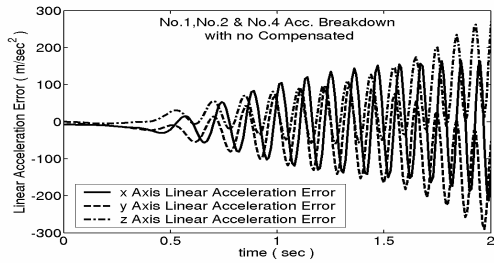


(a)

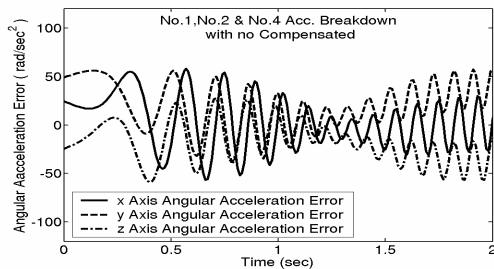


(b)

圖 14. 具角加速度情況下編號 1 與 2 加速儀同時失效並於補償後；(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

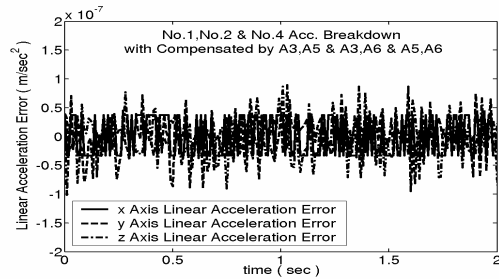


(a)

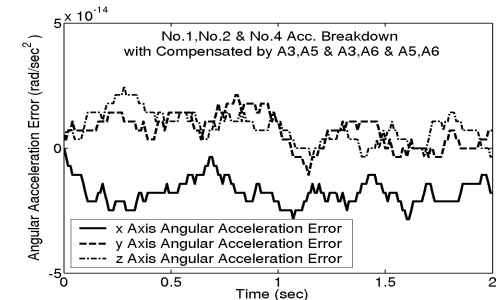


(b)

圖 15. 具角加速度情況下編號 1、2 與 4 加速儀同時失效時；(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。



(a)



(b)

圖 16. 具角加速度情況下編號 1、2 與 4 加速儀同時失效並於補償後；(a)線加速度誤差圖、(b)角加速度誤差圖。

由上述模擬結果討論如下：

1. 由實例一可知在不具角加速度的運動狀況下，當部分加速儀失效時，會視加速儀失效的個數不同，而其每個軸向的線加速度及角加速度的誤差結果亦有所差異。整體上，就線加速度而言，其誤差會隨時間的增加而迅速的發散。另就角加速度而言，其誤差結果則會隨時間的增加則呈現週期性的增減。而在進行加速儀失效補償後，我們即可發現無論線加速度與角加速度的誤差均保持極微小的範圍以內（約 $10^{-6} \sim 10^{-14}$ ），此結果可視為電腦運算所產生的誤差。因此，可獲得正確的補償結果。
2. 在實例二中我們也可以發現在具角加速度的情況下，當部分加速儀失效時，其線加速度與角加速度的誤差情形與實例一概同。惟其線加速度發散的速度會更為迅速，且其角加速度之誤差增減週期會更為劇烈。而在進行加速儀失效補償後，我們也發現：無論線加速度與角加速度的誤差均保持極微小的範圍以內（約 $10^{-6} \sim 10^{-14}$ ），此結果亦可視為電腦運算所產生的誤差。

由上述討論即可獲得驗證，本文所提之方法可有效提供六加速儀慣性導航系統於導航過程中，若發現部份加速儀失效時之補償策略。

六、結論

本文經由向量分析方式可找出六加速儀中若有部分加速儀失效時的補償方法。其中我們也發現在任何一顆或兩顆加速儀同時失效時，均可由其共平面的兩顆功能正常的加速儀予以補償。此外，在三個不處於共一頂點的三個邊上的加速儀同時失效時，亦可獲得其他功能正常的加速儀予以補償，同時我們也確認，如果超過三個以上加速儀同時失效時，則此六加速

儀機制將無法正常運作。而由模擬結果亦可證明本文所發展的失效加速儀補償法則之正確性及有效性，據此可提高六加速儀機制在實際運用上的可靠度。

參考文獻

- [1] Schuler, A. R., Grammatikos, A., and Fegler, K. A., "Measuring Rotational Motion with Linear Accelerometers," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-3, No. 3, pp. 465-471, 1967.
- [2] Chen, J. H., Lee, S. C., and DeBra, D. B., "Gyroscope Free Strapdown Inertial Measurement Unit by Six Linear Accelerometers," Journal of Guidance, Control, and Dynamics AIAA, Vol. 17, No.2, pp.286-290, 1994.
- [3] Mostov, K. S., Design of Accelerometer Base Gyro-Free Navigation System, Doctor of Philosophy in Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, Chap. 5, pp. 178-225, 2000.
- [4] 李守誠、劉正瑜、王亞民，"無陀螺儀固裝式慣性導航系統對初值問題之研究"，中正嶺學報第二十六卷第一期，頁 11-24，1997。
- [5] 李守誠、洪兆宇、方淳民、王振宇，"六加速儀機制導航應用與方向誤差校準方法之研究"，中正嶺學報預定第三十三卷第二期，頁 47-62，2005。