

# 利用中華一號衛星 GPS 資料測算 低階地球重力係數模型之研究

黃立信 黃金維\*

國防大學中正理工學院測繪工程學系

\*國立交通大學土木工程學系

## 摘 要

本研究利用 Kaula 之線性軌道理論及平差理論，先將前期處理人造衛星之定軌數據，求得衛星之位置擾動，再由其位置擾動反推求得地球重力位之球諧係數差值，以便進行各項研究：一是比較計算中華一號衛星的距離變化率(Range Rate)資料及 GPS 資料在徑向、沿向、橫向三方向擾動分量，兩者的共同特色為在橫向方向的擾動分量，震幅幅度最大，平均值卻最小；沿軌跡方向的擾動，圖形變化最激烈。二是以太空計畫室提供一年份之中華一號衛星 GPS 資料分兩部分處理，一為原始狀態，一為以 OSU91A 地位模式等擾動力為改正考量，求出的軌道積分資料；兩者經由軌道擾動理論的計算，可求出相對 OSU91A 球諧係數的差值，由此差值與各月份繪製的圖表，可研判各月衛星運作的狀況。分別擷取各月資料所計算求得之  $\Delta C_{20}$ ,  $\Delta C_{30}$ ,  $\Delta C_{40}$ ,  $\Delta C_{50}$  各項之相應係數，四張圖形趨勢都約略呈現週期性變化，也就是說從華衛一號資料之重力計算，已可以反應重力球諧係數的時間變化。

**關鍵詞：**中華一號衛星、軌道擾動理論、時間變化

## Computation of low degree zonal harmonics of the Earth's

## Gravity field using ROCSAT-1 GPS data

Lih-Shinn Hwang and Cheinway Hwang

*Department of Electrical Surveying and Mapping Engineering,*

*Chung Cheng Institute of Technology, National Defense University*

*\*Department of Civil Engineering, National Chiao Tung University*

### ABSTRACT

The orbit perturbation theory of Kaula was used to derive an approximate analytical formula for near circular orbit and the order-zero formula. With this theory, we tested with different cases of gravity recovery. For one example, computing perturbation components in the radial, along-track and cross-track directions, and exploring Earth's gravity field determination from orbit perturbations. Secondly, one year GPS data of ROCSAT-1 provided by NSPO was processed with two parts. First part is raw data processing. Second part, data obtained from orbit determination is considered to be referenced to the OSU91A geopotential model. Two processed data used orbital theory computing can be used to estimate geopotential model error and compute time variation of geopotential coefficients. Comparison of the monthly value of  $\Delta C_{20}$ ,  $\Delta C_{30}$ ,  $\Delta C_{40}$ ,  $\Delta C_{50}$  estimated from ROCSAT-1 GPS data over one year shows periodic vibration. That is, computing gravity field recovery error in low degree zonal harmonics can effectively present the temporal variation.

**Keywords:** ROCSAT-1, orbital perturbation theory, temporal variation

## 一、前言

本研究依循 Kaula 原有的解析架構[1]，發展 Hwang 改良之線性軌道理論 (orbit perturbation theory)[2]，串連整個相關模式型態，從收集低軌衛星上之定軌數據開始，由資料的前期處理，各座標轉換資料庫的建立，GEODYN II 軟體軌道積分計算，到線性軌道理論之應用[3]，建立其數學關係式及計算程式；由其參數反推求得地球重力場的低階球諧係數差值，經由中華一號衛星實例的應用與測試，驗證測定高精度之軌道及地球位模式的可行性。

就衛星大地測量的理論定義可知，精密的衛星定軌是計算高精度重力場的基礎，同時地球重力場也是決定地球衛星軌道最主要的根源[4,5]。高精度衛星定軌需要精密的地球重力場模型，精確的測定衛星軌道擾動又是獲取重力場訊息重要的途徑。因此，應用衛星技術，不僅採集豐富的重力場數據，而且幾乎覆蓋了全球，精度也有顯著的提高，從而使地球重力場的研究獲得突破性的發展。衛星定位和地球重力場模型解算是自然科學中的基礎研究，對大地測量學、地球物理學、地球動力學、地質學、海洋科學、空間科學等的發展具有十分重要的意義。地球重力場影響和限制著一切空間運動的物體，是人造衛星的主要受力來源；而對衛星的觀測提供了更多的地球重力場的訊息，可以彌補地面觀測資料的不足[6]。

地球重力場模型的表現形式有幾種，但目前最普遍的重力場模型是球諧係數展開模式[7]，建立地球重力場模型的發展過程是與衛星大地測量發展的過程關係密切。1958年，Buchar 根據 Sputnik 衛星近地點運動計算出  $J_2$  階位係數，開啓衛星軌道數據探測地球重力場的先河。 $J_2$  的變化又與地球極慣量矩變化等同，直

接反映在地球自轉速率的變化上[8,9]。因此，人造衛星和地球重力場模型研究是相輔相成的[10]，對國民經濟建設、國防建設和科學研究等具有十分重要的作用。歐美各國政府，甚至亞洲如中國大陸、日本和印度，半個世紀以來，無不投入大量的精力與時間，從事衛星定位和重力場模型之研究，也的確取得各方面的成果[11-13]。過去台灣受限於政治現實與技術問題，在這些方面基礎研究的表現比較有限，但仍有少量的研究論著持續問世[14,15]。隨著國內航太科技的快速發展，及世界網際交流的熱絡，使得台灣在衛星技術和地球物理方向的研究環境，也獲得某些程度的改善，這也是引發本文從事研究結合衛星定位及重力場模式方向的動機。

因為中華一號衛星對地連續觀測，就可以敏感到地球引力場低階為係數的時間變化，從而可以利用衛星軌道研究地球引力場低階位係數的時變規律和地心運動之發展。中華一號衛星是國人自行研發的第一枚低軌道科學實驗衛星，繼之興起的福衛二號、三號衛星計畫，皆以一號衛星的發展經驗，作為日後研究發展的準則。中華衛星系列計畫的興起，對國內科技研究發展，都是影響甚鉅的里程碑，以中華衛星一號作為本文的研究對象，無疑是具有一定程度之意義和代表性。

## 二、中華一號衛星介紹

中華衛星一號為我國第一枚低軌道的科學實驗衛星，主要的任務為科技研究。包括進行海洋水色照相、電離層電漿電動效應測量及使用 Ka 頻道之通訊實驗等三項科學及技術實驗，每日約六次對國內接收站傳輸所接收的資料。在衛星本體設計初時，對軌道的精度就沒有特別要求。

1999 年 01 月 27 日由美國佛羅里達州卡納維爾角空軍基地順利發射升空後，進入與赤道傾斜 35 度、距地球表面 600 公里的低軌道飛行，約 97 分鐘繞行地球一周，每日約六次對國內接收站傳輸所收集到的資料，其形態為六角柱形，重量為 395 公斤，高為 2.1 公尺，寬為 1.1 公尺，太陽能板伸展時達 7.2 公尺，一號衛星於 2004 年 6 月 17 日結束其任務，期間資料正常運作長達四年半[16]。表 1 為中華一號衛星的相關參數。

表 1. 中華一號衛星軌道參數

發射日期	1999.1.27
衛星編號	9901271
高度	600 公里
偏心率	0.001
傾角	35°
質量	395 公斤 (含酬載及燃料)
尺寸	高 2.1 公尺,寬 1.1 公尺 (太陽能電池板伸出時達 7.2 公尺)
再訪頻率	台灣上空一天約六次
軌道重覆週期	每日繞地約 15 圈
繞行地球一週時間	約 96.7 分鐘
任務壽命	2 年(設計壽命為 4 年)

中華一號衛星軌道為高度 600 公里且離心率為 0.001 的圓形低地球軌道 (Low-Earth-Orbit)。因為軌道傾角為 35 度，所以地面軌跡涵蓋了地球南北緯 35 度之間的範圍，約佔 57% 之地球表面積。圖 1 為中華一號衛星之地面軌跡圖。表 2 及 3 分別為本研究為中華一號衛星定軌所使用的擾動力模式及參考框架，亦為 TOPEX/POSEIDON 衛星定軌所使

用[17]。表中地面追蹤站之所以使用 ITRF96 座標系統，因為它屬地心座標系統。大地位模式採用展開至 70×70 階最新模式的 EGM96，連帶也採用 EGM96 海潮模式。所有的行星星曆都採用 JPL DE-200 星曆。協議慣性座標系則以 J2000 標準時刻為主。

表 2.中華一號衛星定軌所使用的擾動力模式

參考橢球體	$a_e = 6378136.3m$ $1/f = 298.257$
GM	$398600.4415 \text{ km}^3/\text{s}^2$
光速	$C = 299792.458\text{km/s}$
大地位模式	EGM96 展開至 70×70 階
多體 (N-Body)	太陽、月球、水星、金星、火星、土星、木星、天王星、海王星，根據 JPL DE200 行星星曆
固體潮	$K_2 = 0.3$
海潮	EGM-96 海潮模式
大氣阻力	French DTM 模式
太陽輻射壓	太陽輻射壓 1AU = $1367.2035\text{W/m}^2$
地球輻射壓	Albedo

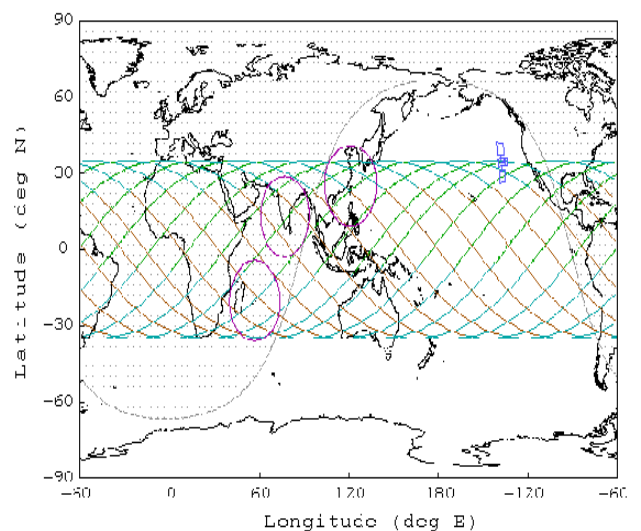


圖 1. 中華一號衛星之地面軌跡圖[16]。

太空計畫室(NSPO)提供 1999 年到 2001 年的一號追蹤資料，本研究則以 GEODTNI 軟體來實際計算 ROCSAT-1 的軌道，重複試驗各項模式的參數設定，考慮所有作用在衛星擾動力的影響，希望在先天條件不好的情況下，也能達到一號衛星之最佳化的軌道計算狀態，以便驗證各項理論試驗。

表 3.中華一號衛星定軌所使用的參考框架

	模式	參考文獻
協議慣性座標系 (CIS)	J2000	McCarthy,1992
歲差	IAU1976	Lieske et al.,1977
章動	IAU1980	Wahr,1981[27]
行星星曆	JPL DE-200	Standish,1990
地球自轉參數	IERS Bulletin B	IERS www[18]
板塊運動	Nuvel(NNR)	Demets et al.,1990
追蹤站座標	台灣追蹤站： ITRF96	黃立信，2002[15]
海水負載(Ocean loading)	測站測算值	McCarthy,1992

中華一號衛星用來軌道測定的酬載列表 4，表 4 明載中華一號衛星三種定軌的追蹤資料的精度。首先角度觀測精度為 0.2 度，因 NSPO 能提供相關資訊實在太少，且無法掌握其大氣改正模式，本文將不予使用。而 NSPO 設計以中壢和台南兩個衛星訊號追蹤站，接收 S-band 距離變化率觀測資料，雖可能達到  $15 \text{ cm s}^{-1}$  或  $0.16 \text{ cm s}^{-1}$  的精度[19]，但其大氣改正模式、時錶偏差等模式均無法自動自追蹤站獲得，使得本研究一號衛星定軌工作進行，必須經過多次試驗，以求得其設定參數之”最佳值”，且因電離層效應因無法預知，必須以一 bias 參數，以便吸收此效應，詳細的研究成果請參見黃立

信、黃金維[20]之研究報告。一號衛星之 GPS 資料之定位導航模式，因受限於當時刻 SA 效應之影響，精度僅約在 50 公尺[19]，但三種酬載中，以 GPS 資料收集最為完整，故本文主要使用資料以 GPS 之定位資料為主。

表 4. 中華一號衛星定軌酬載

酬載	目的	精度
S 波段天線（距離變化率資料）	資料傳送，但載波訊號可用來追蹤定軌	$15 \text{ cm s}^{-1}$ [16] $0.16 \text{ cm s}^{-1}$ [19]
單頻 GPS 接收儀（GPS 資料）	接收 GPS 衛星訊號及導航定位 L1 = 1575.42 MHz	約 50 公尺
角度資料	天線盤接收之角度誤差值	約 $0.2^\circ$

### 三、 GEODYN II--高精度軌道積分定軌軟體

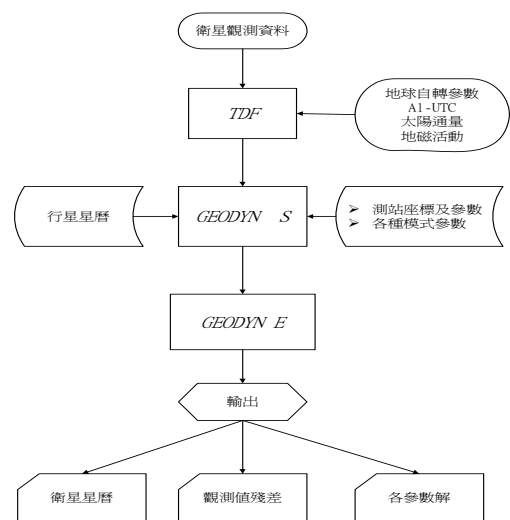


圖 2. GEODYN II 計算流程圖[21]。

GEODYN II 係於 1971 年由美國太空總署 (NASA) 機構下的 Wolf Research and Development Group (EG&G)所發展的，其處理

問題主要的功能可分為『軌道預估』(Orbit Prediction)及『參數估計』(Parameter Estimation)兩種模式，且能同時處理不同衛星不同觀測資料如 GPS，SLR，VLBI，DORIS 等。

以 GEODYNII 做軌道預估時，需提供各種擾動力模式及初始狀態向量，經由積分運動方程得到衛星軌道。積分所使用的演算法是高階固定時間步長的 Cowell 預估糾正法。在參數預估模式則是經由追蹤資料求解出特定模式的參數，如大氣阻力係數  $C_D$  和太陽輻射壓係數  $C_R$  等。求解這些參數所用的方法是貝式(Bayesian)最小二乘估計法[22]。

GEODYN 軟體在執行時可分為三大步驟，其主要作用分別說明如下，執行流程見圖 2：

1. TDF (Tracking Data Formatter)：選擇所需的觀測資料並將格式轉換為 GEODYN S 所需的格式。同時，必須建立與觀測時間相對應的資料庫，即 gdntable.data，這個資料庫包括時間系統、太陽通量(Solar Flux)、地磁活動(Geomagnetic Activity)和地球自轉參數等資料，以供後續步驟執行所用。
2. GEODYN S：讀入 TDF 的觀測資料，及輸入軌道測定和參數估計所需的參數值，並轉換為 GEODYN E 格式。
3. GEODYN E：此部份為軟體主要計算部份，包含軌道積分與參數求解計算，所輸出的結果包含參數解、觀測值殘差及衛星星曆等。

詳盡操作程序請參略手冊內容[22]。

本研究所使用的 TDF 版本為 2002 年 11 月版，GIIS 與 GIIE 版本為 2003 年 2 月（其主要作用請參見圖 2 之計算流程圖）。

## 四、座標轉換

高精度之衛星大地作業關鍵，在於各座標系統之間的數值轉換，座標系統彼此之間的轉換過程，牽涉不少的天文參數設定及星曆資料庫之建立。本節重點即在簡介各座標系統的定

義及轉換程序。

### 4.1 座標變動量改正

衛星運動方程式建立在慣性座標系統下的，但地位係數展開則是以地球固定座標系統為準，因而衛星受此擾動所產生的加速度亦是以地球固定座標系統的方式來表達。為了要進行數值積分，必須要將此擾動加速度轉以慣性座標表達。將衛星在慣性座標系統下的位置向量  $\bar{r}_{CIS}$ ，轉為地球固定座標系統下的位置向量  $\bar{r}_{CTS}$ ，其轉換公式為

$$\bar{r}_{CTS} = SN P \bar{r}_{CIS} \quad (1)$$

其中，

S：極移(Polar Motion)與地球自轉之轉換矩陣；

N：章動(Nutation)轉換矩陣；

P：歲差(Precession)轉換矩陣。

在(1)式中，P 矩陣表示在  $\epsilon_F$  與  $\epsilon_D$  時刻間，兩相應的平框架之間的旋轉；N 矩陣表示在時刻  $\epsilon_F$  與  $\epsilon_D$  之間，由章動所引起的框架旋轉，亦即將相應時刻的平框架旋轉至真框架；而 S 矩陣的目的則在將相應於時刻  $\epsilon_D$  的慣性參考框架（以真赤道及真春分點為依據）轉換成地固參考框架（以協議極軸及經度原點為依據）。上述三矩陣分別可寫成[23]

$$P[\epsilon_F, \epsilon_D] \equiv R_3(-z_A) R_2(\theta_A) R_3(-\zeta_A) \quad (2)$$

其用意為將平天球固定座標系轉至另一時之平天球座標系之轉換；另

$$N \equiv R_1(-\epsilon) R_3(-\Delta\psi) R_1(\epsilon_0) \quad (3)$$

其用意為瞬時平天球固定座標系轉至瞬時真天球座標系之轉換；而

$$S \equiv R_2(-x_p) R_1(-y_p) R_3(\theta) \quad (4)$$

其用意真平天球座標系轉至地球固定座標系之轉換；其中， $R_1, R_2, R_3$  分別為框架繞 X, Y, Z 軸

的旋轉矩陣。

#### 4.2 座標轉換程序

在計算地球擾動力（加速度）時，就必須遵循下列的座標轉換程序：

(1) 建立  $\bar{r}_{CTS}$  與  $\bar{r}_{CIS}$  之間的數學關係式，即 (1) 式所示；

(2) 由  $\bar{r}_{CTS}$  計算衛星在慣性座標系統下的加速度  $\ddot{\bar{r}}_{CTS}$  (以 CTS 系統表示)；

(3) 利用座標逆轉換，計算衛星在慣性座標下的加速度  $\ddot{\bar{r}}_{CIS}$  (以 CIS 系統表示)；

使用之轉換公式[24]為

$$\ddot{\bar{r}}_{CIS} = (SNP)^{-1} \ddot{\bar{r}}_{CTS} \quad (5)$$

(只有單獨考慮地球擾動位時，此式方成立)。

(4) 進行數值積分。

完整的計算流程可以簡單表示為

$$\bar{r}_{CIS} \xrightarrow{SNP} \bar{r}_{CTS} \rightarrow \ddot{\bar{r}}_{CTS} \xrightarrow{(SNP)^{-1}} \ddot{\bar{r}}_{CIS} \rightarrow \text{數值積分}$$

不是所有的加速度計算都適合此程序，唯有單獨考慮地球擾動位時，此轉換程序才得以成立。舉例而言：

如果  $\bar{r}_I, \bar{r}_T$  為 CIS 與 CTS 的位置向量， $R$  為轉換矩陣，且下式成立

$$\bar{r}_I = R\bar{r}_T \quad (6)$$

當一次微分成速度向量時，上式轉為下式

$$\dot{\bar{r}}_I = R\dot{\bar{r}}_T + R\dot{R}\bar{r}_T \quad (7)$$

再次微分成加速度向量，則

$$\ddot{\bar{r}}_I = R\ddot{\bar{r}}_T + \dot{R}\dot{\bar{r}}_T + R\dot{R}\dot{\bar{r}}_T + R\ddot{R}\bar{r}_T \neq R\ddot{\bar{r}}_T \quad (8)$$

由上述之簡單數學式推導，得知座標轉換程

序，必須是在有條件（單獨考慮地球擾動位）的情況下才得以成立。

由於在推求衛星加速度的理論中，像以慣性參考框架為基礎，而經由 UCAR 與 IGS[25] 網站所取得的星曆資料則為地固參考座標 (ITRF94)，因此在計算之前需要先進行框架間的座標轉換。ITRF 參考框架由 IERS 機構利用分佈全球追蹤站之資料決定出的系統。其中，ITRF94 是以 1993.0 時刻為基準定義出的系統。而將地固座標轉換換成慣性座標的公式亦可表示為[23]：

$$r_{CIS} = (SNP)^{-1} \cdot r_{CTS} \quad (9)$$

## 五、線性軌道理論介紹

本章將利用 Kaula 之線性軌道理論及平差理論[1]，以人造衛星上之定軌數據，求得衛星之位置擾動，再由其位置擾動反推求得地球重力位之球諧係數差值。

### 5.1 克卜勒函數表達之地球引力位擾動

因為地球並非是一個均質的圓球體，其形狀是不規則，質量分佈也不均勻，因此地球對衛星除了中心力之外，尚有地球非球形引力。根據地位理論[26]，衛星在地球重力場所受到的引力作用，可採球諧函數展開式表示如下：

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left[ \frac{a_e}{r} \right]^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \right] = \frac{GM}{r} + R \quad (10)$$

其中，

$r, \phi, \lambda$  : 衛星於地固座標系距離、地心緯度及地心經度；

$a_e$  : 參考橢球體長軸半徑；

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  : 正規化球諧係數;

$\bar{P}_{nm}$  : 正規化諦合勒間德函數(Fully

Normalized Associated Legendre Function)。

上式中，第一項是地球為一均勻球體所造成的中心引力，其餘各項為地球非球體的擾動位  $R$ ，當考慮衛星高度與軌道離心率時，我們可以將上式中的擾動位  $R$ ，以下列級數展開：

$$R = \sum_{n=2}^K \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-Q}^Q R_{nmpq} \quad (11)$$

式中  $K$  為相對於衛星高度之球諧函數展開式之最大階數 (degree)， $Q$  為相對於軌道離心率的最高指標 (index)；舉例來說，當高度為 800km 時， $K$  約為 50，而近似圓形軌道之  $Q$  值則約為 1。此外，為了配合擾動函數之應用以及 Lagrange 之運動方程及線性解，可將公式(11)之地球擾動位以克卜勒軌道元素表達為 [27][28]：

$$R_{nmpq} = \frac{GMa_e^n}{a^{n+1}} \bar{F}_{nmp}(\theta) G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta) \quad (12)$$

式中  $\theta$  為格林威治恆星時， $\bar{F}_{nmp}$  為完全正規化

傾角函數， $G_{npq}$  為偏心率函數，又

$$S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta) = \begin{pmatrix} \bar{C}_{nm}^+ \\ -\bar{S}_{nm}^- \end{pmatrix} \cos(\psi_{nmpq}) \quad (13)$$

$$+ \begin{pmatrix} \bar{S}_{nm}^+ \\ \bar{C}_{nm}^- \end{pmatrix} \sin(\psi_{nmpq})$$

$$\psi = (n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega-\theta) \quad (14)$$

(13)式中使用  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  係數時，”+”代表

( $n-m$ ) 為偶數，”-”代表 ( $n-m$ ) 為奇數。

## 5.2 線性軌道擾動

Lagrange's 運動方程可將 6 項克卜勒元素之時間變化率表為[1]：

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2e\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \quad (15)$$

其中， $R$  為擾動位函數(見(11)式)。當  $nmpq=2010$  時，

$$V_{2010} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 F_{201}(i) G_{210}(e) \quad (16)$$

而將  $R = V_{2010}$  代入(15)式時，則得

$$\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)a^2} (1-5\cos^2 i)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)a^2} \cos i$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)a^2} (3\cos i - 1) \quad (18)$$

此為  $C_{20}$  對克卜勒元素線性之擾動 (secular perturbation)，據此線性擾動，吾人可提出(15)

式之近似解。首先假設等式右邊  $a$ 、 $e$ 、 $i$  為常數， $\omega$ 、 $\Omega$ 、 $M$  成線性運動，即：

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0) \\ \Omega(t) &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0) \\ M(t) &= M_0 + \dot{M}(t-t_0)\end{aligned}\quad (19)$$

式中， $t_0$  為一參考時刻， $\omega_0$ 、 $\Omega_0$ 、 $M_0$  是常數， $\dot{\omega}$ 、 $\dot{\Omega}$ 、 $\dot{M}$  則為角速度，可由(18)式估得。

將(15)式左右同時對時間積分，配合(11)式，以  $\Delta s_k, k=1,..6$  表示，則得下列 6 項克卜勒元素擾動：

(1)  $a$ 、 $e$ 、 $I$  之擾動(即  $\Delta a_{nmpq}, \Delta e_{nmpq}, \Delta i_{nmpq}$ )

$$\Delta s_k = \sum_{n=2}^K \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-Q}^Q \alpha_{nmpq}^i S_{nmpq} \quad (20)$$

(2)  $\Omega$ 、 $\omega$ 、 $M$  之擾動(即

$$\begin{aligned}\Delta \omega_{nmpq}, \Delta \Omega_{nmpq}, \Delta M_{nmpq} \\ \Delta s_k = \sum_{n=2}^K \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-Q}^Q \alpha_{nmpq}^i S_{nmpq}^*\end{aligned}\quad (21)$$

(21)式中，

$$\begin{aligned}S_{nmpq}^*(\omega, M, \Omega, \theta) &= \begin{pmatrix} \bar{C}_{nm}^+ \\ -\bar{S}_{nm}^- \end{pmatrix} \sin(\psi_{nmpq}) \\ &- \begin{pmatrix} \bar{S}_{nm}^+ \\ \bar{C}_{nm}^- \end{pmatrix} \cos(\psi_{nmpq})\end{aligned}\quad (22)$$

$\alpha_{nmpq}^k$  分別為 Lagrange EOM 函數方程式  $\Delta s_k$  之  $a, e, I, \Omega, \omega, M$  項函數。

考慮(17)(18)(19)式，則 Lagrange's 之運動方程式之近似解為：

$$\begin{aligned}a(t) &= \bar{a} + \Delta a \\ e(t) &= \bar{e} + \Delta e \\ i(t) &= \bar{i} + \Delta i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0) + \Delta \omega \\ \Omega(t) &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0) + \Delta \Omega \\ M(t) &= M_0 + \dot{M}(t-t_0) + \Delta M\end{aligned}\quad (23)$$

其  $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \omega_0, \Omega_0, M_0, \dot{\omega}, \dot{\Omega}, \dot{M}$  等九項元素稱為參考軌道元素。前六項為克卜勒元素於某一弧段之平均值，而後三項  $\omega, \Omega, M$  為之平均角速度。

衛星座標以運動方程相關之三分量—徑向(radial)、沿向(transverse)、橫向(normal)分量表達軌道誤差之幾何意義。本文將以 Kaula 的運動方程近似解來分析此三方向之擾動，再將克卜勒元素以(20)與(21)式之線性解代入，綜合整理後可得下式：

$$\Delta x_i = \sum_{k=1}^6 c_k^i \Delta s_k \quad i=1,2,3 \quad (24)$$

式中  $c_k^i$  為克卜勒擾動轉換到  $r, t, n$  方方向擾動之轉換係數。 $\Delta s$  為以克卜勒元素表達之擾動位(見 20、21 式)。在實際應用上，三方向的位置擾動量皆可以下列內積的方式來表達：

$$\Delta x_i = A_i^T \beta \quad (25)$$

式中， $\beta$  為地位係數之向量，而  $A_i$  則為結合(20)、(21)、(24)之向量。當軌道弧長小於一星期時，則在  $\alpha_{nmpq}^i$  中的  $a, e, i$  元素可視為常數，

且在(11)式中，考慮之階數 (degree) 至  $K$ ，指標 (index) 到  $Q$ 。對高度在 1000 公里以內的低軌衛星而言，上述近似公式適用的運動時間長度約為七天，七天以後則需重新計算新的參考軌道元素[29]。

## 六、線性軌道理論應用

### 6.1 兩種定軌資料求取擾動力分量

在本節研究中，利用 GEODYNII 軟體處理



中華一號衛星的兩種定軌資料（一為距離變化率資料，一為 GPS 資料），並進一步驗證應用線性軌道理論。第一步先選擇 1999 年 10 月 27 日至 30 日止，計三天的時間長短，個別利用 GEODYNII 處理兩種定軌資料，各種模式改正及擾動力的設定均盡量一致，得到兩個時間項相同的積分軌道，再比較兩者資料造成軌道各分量之差異性，以說明本研究模式改正及擾動力設定之正確性。本文所發展之 `perturb.f` 程式，目的為計算軌道的擾動力在徑向、沿向及橫向各方向的擾動分量。

中華一號衛星兩種定軌資料，由線性軌道理論演算過後的係數展開至 5 階，計算徑向、沿向和橫向擾動，即可得到圖 3(a)、(b)、(c)，表 5 則為該擾動力分量在各方向之統計表；當展開至 10 階時，可得到圖 4(a)、(b)、(c)，表 6 則為該擾動力分量在各方向之統計表。

比較兩種軌道資料在不同階數之差異值圖形呈現極類似的走向趨勢（見圖 3(a)與圖 4(a)，圖 3(b)與圖 4(b)，圖 3(c)與圖 4(c)，），證明積分模式與參數設定之正確性；且設定的最大階數不同，所造成的在徑向、沿向和橫向擾動之最大、最小值就有所不同。

表 5. 係數展開至 5 階計算三方向擾動之統計表  
(單位： $\text{kg}\cdot\text{ms}^{-2}$ )

	徑向擾動 ( $r$ 方向)	沿向擾動 ( $t$ 方向)	橫向擾動 ( $n$ 方向)
平均	11.5565	-284.5988	4.1921
最大值	35.3134	-7.0444	595.067
最小值	-9.6857	-560.2273	-594.441

表 6. 係數展開至 10 階計算三方向擾動之統計表  
(單位： $\text{kg}\cdot\text{ms}^{-2}$ )

	徑向擾動 ( $r$ 方向)	沿向擾動 ( $t$ 方向)	橫向擾動 ( $n$ 方向)
平均	11.5540	-284.6057	4.1917
最大值	46.749	-1.2775	603.2943
最小值	-24.0503	-562.9601	-598.9997

平均	11.5540	-284.6057	4.1917
最大值	46.749	-1.2775	603.2943
最小值	-24.0503	-562.9601	-598.9997

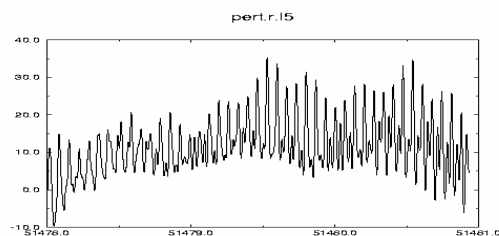


圖 3(a). 兩種定軌資料演算後的係數展開至 5 階，計算徑向擾動分量圖。

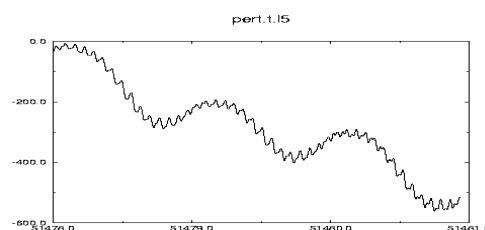


圖 3(b). 兩種定軌資料演算過後的係數展開至 5 階，計算沿向擾動分量圖。

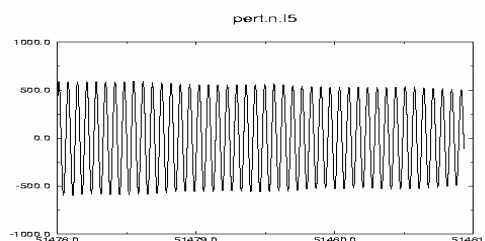


圖 3(c). 兩種定軌資料演算過後的係數展開至 5 階，計算橫向擾動分量圖。

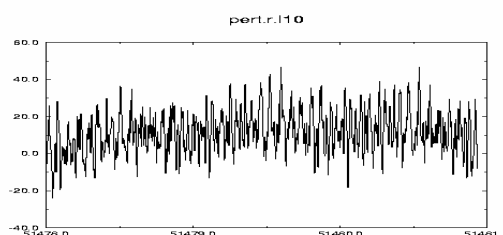


圖 4(a). 兩種定軌資料演算過後的係數展開至 10 階，計算徑向擾動分量圖。

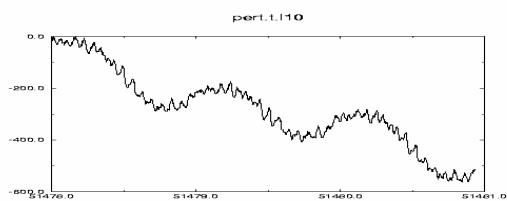


圖 4(b).兩種定軌資料演算過後的係數展開至 10 階，計算沿向擾動分量圖。

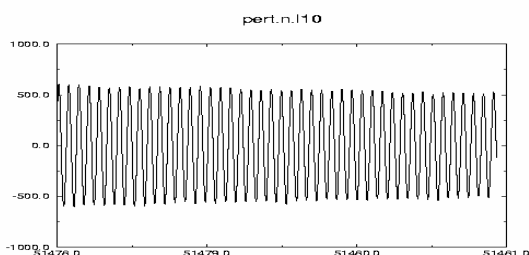


圖 4(c).兩種定軌資料演算過後的係數展開至 10 階，計算橫向擾動分量圖。

表 5 與表 6 的共同特色為沿向的擾動，圖形波動變化最激烈；在橫向方向的擾動分量，震幅幅度最大。且兩者均顯示三方向擾動力分量之最大最小值，與設定的最大階數成正比。沿向、徑向的圖形走向與數據均符合衛星運動方的假設前提[2]；至於橫向（軌道指向地心方向之分量）震幅的激烈變化，歸納原因是中華一號中壢、台南二衛星追蹤站的幾何分佈不均，造成積分軌道形狀嚴重變形，如欲嚴格要求軌道積分之精度，也只有東半球上空（且限於中壢、台南之間）之弧段可以滿足需求，西半球部分之積分結果（最大、最小值發生處）將產生極大的誤差量。

## 6.2 求取重力球諧係數之時間變化

本節將整理 Kaula 之線性軌道理論及平差理論做綜合應用，以人造衛星上之定軌數據，求得衛星之位置擾動，再由其位置擾動反推求得地球重力位之球諧係數差值。太空計畫室提

供中華一號衛星 2000 年之一整年資料，平均每 32 秒一筆 GPS 資料，此原始資料為地固座標系統(CTS)。本研究將此負載之原始資料，依據 IGS 發佈之 2000 年星曆規格

(<ftp://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/data/format/>)

，從中篩選每月七天為一組，共計 12 組資料，各組資料的組成請參見表 7。

在資料處理程序方面分成兩個部分：

第一部份：直接將原始的 GPS 資料，利用座標轉換的程序[21]，轉換至慣性座標系統(CIS)的相關規格。

第二部份：將 12 組的原始 GPS 資料加以改正格式，成為 GEODYNII 所能處理的規格。經過各種模式及擾動力的改正及設定，經由 GEODYN 軟體計算，就得到積分改正過後的衛星軌道資料，其輸出檔為慣性座標系統(CIS)。因受到資料本身精度及多寡的限制，且受到擾動力模式（如大氣阻力、太陽輻射壓等）及初始狀態向量等因素的影響，經反覆測試計算過程，不斷修正所得之積分結果。

將每月兩部分的資料，由線性軌道理論演算過後的差值係數展開至 5 階（因為係數差值在低階時最明顯），分別擷取各月資料所計算球諧係數差值，相對於 OSU91A 之  $C_{20}$ ,  $C_{30}$ ,  $C_{40}$ ,  $C_{50}$  各項之相應係數，以 month 為 x 軸，coefficient differences(coeff. diff)為 y 軸，繪製出圖 5(a)、5(b)、5(c)及 5(d)。

表 7. 本研究處理 2000 年中華一號衛星資料之分組表

GPS WEEK	起迄日期	GPS-DAY
1046 ( 1 <sup>st</sup> month)	23-01-2000 to 29-01-2000	023-029
1050 ( 2 <sup>nd</sup> month)	20-02-2000 to 26-02-2000	051-057
1054 ( 3 <sup>rd</sup> month)	19-03-2000 to 25-03-2000	079-085
1059 ( 4 <sup>th</sup> month)	23-04-2000 to 29-04-2000	114-102
1063 ( 5 <sup>th</sup> month)	21-05-2000 to 27-05-2000	142-148
1067 ( 6 <sup>th</sup> month)	18-06-2000 to 24-06-2000	170-176
1072 ( 7 <sup>th</sup> month)	23-07-2000 to 29-07-2000	205-211
1076 ( 8 <sup>th</sup> month)	20-08-2000 to 26-08-2000	233-239
1080 ( 9 <sup>th</sup> month)	24-09-2000 to 30-09-2000	268-274
1085 (10 <sup>th</sup> month)	22-10-2000 to 28-10-2000	296-302
1089 (11 <sup>th</sup> month)	19-11-2000 to 25-11-2000	324-330
1094 (12 <sup>th</sup> month)	24-12-2000 to 30-12-2000	359-365

因為第一部份的資料是未加任何修飾的原始觀測資料，而第二部份則是主要以現有之 OSU91A 地位模式等擾動力為改正考量，求出的軌道積分資料，兩者經由線性軌道理論的計算，正可求出相對 OSU91A 球諧係數的差值，由此差值與各月份繪製的圖表，正可研判重力球諧係數之時間變化。

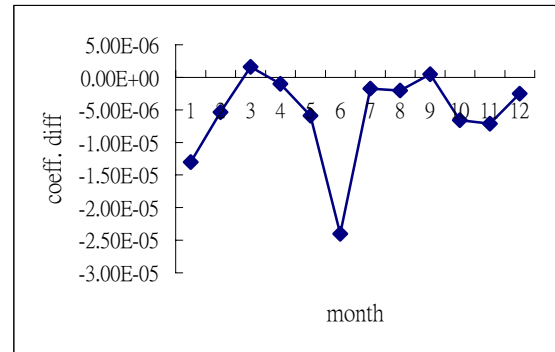


圖 5(a). 計算 2000 年各月球諧係數相對於 OSU91A 之  $C_{20}$  項改正數之關圖。

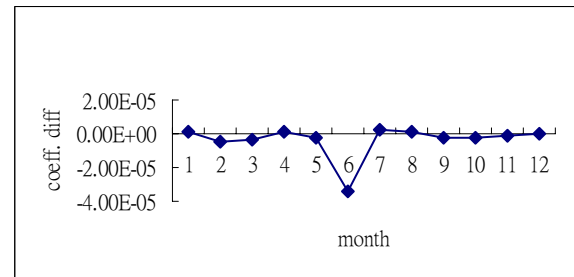


圖 5(b). 計算 2000 年各月球諧係數相對於 OSU91A 之  $C_{30}$  項改正數之關係圖。

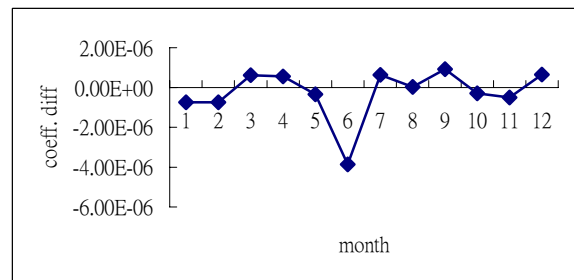


圖 5(c). 計算 2000 年各月球諧係數相對於 OSU91A 之  $C_{40}$  項改正數之關係圖。

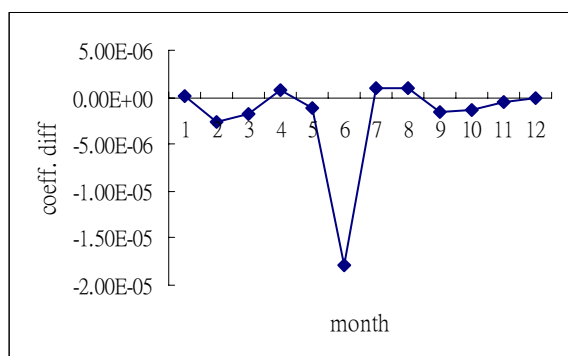


圖 5 (d). 計算 2000 年各月球諧係數相對於 OSU91A 之  $C_{50}$  項改正數之關係圖。

引力場低階係數  $J_2$  和  $J_3$  的長期變化可以用於研究和解釋地幔滯彈性和後冰河回彈問題， $J_2$  和  $J_3$  的周期和准周期變化可以用於固體地球、海洋和大氣的潮汐和非潮汐變化以及地球各圈層的相互作用研究。就本研究而言，由圖 5(a)、5(b)、5(c)、5(d)來看，四張圖形趨勢都呈現正弦函數之週期性變化，也就是說因為本研究計算求得之引力場低階係數  $C_{20}$ 、 $C_{30}$ （也就是  $J_2$  和  $J_3$ ）確實符合週期變化，從一號資料計算重力，的確可以看出重力球諧係數的時間變化。 $C_{40}$ 、 $C_{50}$  圖形是依循  $C_{20}$ 、 $C_{30}$  圖表而變化，僅供為參考。僅就圖 5(a)而言，可看出  $J_2$  明顯的季節性變化，可能與太陽活動密切相關，由此圖形即可大膽的預測 2000 年地球每月份含水量的週期性變化，當然該結論必須配合更多的水文資料進行分析。就本研究宗旨，結果已成功說明利用衛星軌道研究低階重力係數週期性變化的可行性。

唯本研究採用的觀測資料時間只有一年，且僅只運用中華一號一顆衛星的資料，是造成解讀圖形物理特性誤差的主要原因。6.1 節的計算結果已說明一號衛星在橫向方向擾動量最大，在於接收站幾何分配不均，導致積分軌道形狀嚴重變形。而本節利用衛星積分軌道計算地球重力場，必須以全球為考量範圍，以此觀

測  $J_2$  和  $J_3$  的長期變化，相對也就面臨軌道積分『不佳』弧段對全球重力計算精度的干擾。至於 6 月時訊號接收發生異狀，原因則有待進一步查探。

## 七、 結論及建議

1. 當進行軌道積分時，考慮的擾動力模式越少，呈現的結果越接近理想的線性狀態。在實際運算資料時，GEODYN II 輸入檔 ftm05 指令中，最難控制的指令就是 DRAG（大氣壓力）和 SOLRAD（太陽輻射壓）；這兩種指令能夠將軌道差值的線性發散現象約制，其本身的方式是以線性方式取差值的最佳化值，所以必須一個時段給一個值，通常國外的研究報告上多以經驗值來做簡單決定。本研究到目前為止只能達到初解一號軌道，而無法繼續進行資料的篩選與剔除的工作，以提升軌道精度達至公尺級的地步。
2. 本研究是依循原有的線性理論架構，以求建立和比較定軌資料與擾動力的關係，進而從其軌道模式，反推求出地球重力位球諧係數的數學關係式。本研究為求作業方便，統一訂定 EGM96 模式之  $a_e$  和  $GM$  為標準，這對另一比較上的 OSU91A 模式有一定的差異，極有可能造成真實重力、參考重力場對軌道積分造成嚴重的系統誤差。
3. 在 6.1 節中比較 Range Rate、GPS 兩種資料差異值圖形，在橫向方向震幅的激烈變化，係因為中華一號衛星追蹤站的幾何分配不均，造成積分軌道形狀嚴重變形。中華一號衛星主要的任務以海洋照相為主，就其定軌精度的設計上，並不需要太高的精度。在計算軌道積分時，低軌道衛星要達到高精度之軌道測定，所需受到之擾動力就愈複雜，加上中華一號衛星本身追蹤資料之幾何及品質均不理想，實際上如利用中華一號衛星之

追蹤資料來進行計算重力的試驗時，就可預期其不佳之結果。本文在中華一號衛星定軌雖已獲得具體成果，但其精度尚有改善的空間。如果利用幾何法之差分定位的數學方式，降低測站座標或系統誤差的影響，相信對軌道精度精進仍有一定的成效。

- 在 6.2 節中處理的兩部分資料：第一部份的資料是未加任何修飾的資料，而第二部份則是主要以 OSU91A 地位模式等擾動力為改正考量之軌道積分資料，兩者經由線性軌道理論的計算，正可求出相對 OSU91A 球諧係數的差值，由此差值與各月份繪製的圖表，正可研判各月衛星運作的狀況。分別擷取各月資料所計算求得之  $\Delta C_{20}$ ,  $\Delta C_{30}$ ,  $\Delta C_{40}$ ,  $\Delta C_{50}$  各項之相應之係數，由圖 5(a)、5(b)、5(c)、5(d) 來看，四張圖形趨勢都呈現正弦函數之週期性變化；也就是說華衛一號軌道資料儘管先天設計不利於地球重力場計算，經過線性軌道理論的設計與計算，仍能看出重力球諧係數的時間變化。

### 參考文獻

- [1] Kaula, W. M., Theory of Satellites Geodesy, Blaisdell Publ. Co., London, 1966.
- [2] Hwang, C., "Gravity Recovery Using COSMIC GPS Data: Application of Orbital Perturbation Theory," Journal of Geodesy, Vol.75, 117-136, 2001.
- [3] 黃立信、黃金維，"CHAMP 衛星的線性軌道理論應用"，第二十二屆測量學術及應用研討會論文集，國防大學中正理工學院，桃園，2003。
- [4] 王昆杰、王跌虎、李征航，衛星大地測量原理，測繪出版社，北京，1991。
- [5] 李慶海、崔春芳，衛星大地測量原理，測繪出版社，北京，1989。
- [6] 陳俊勇，地面參照系定向理論基礎，測繪出版社，北京，1988。
- [7] 寧津生、邱衛根、陶本藻，地球重力場模型理論，武漢測繪科技大學出版社，武漢，1990。
- [8] 管澤霖、寧津生，地球形狀及外部重力場（上、下冊），測繪出版社，北京，1981。
- [9] 郭俊義，地球物理學基礎，測繪出版社，北京，2001。
- [10] 陸仲連、吳曉平，人造地球衛星與地球重力場，測繪出版社，北京，1994。
- [11] 彭碧波，人衛激光測距的地球動力學應用，中國科學院測量與地球物理研究所博士學位論文，武漢，1998。
- [12] 董曉軍，TOPEX 衛星精密定軌及測高資料分析研究，中國科學院上海天文台博士論文，上海，1999。
- [13] 沈云中，應用 CHAMP 衛星星曆精化地球重力場模型的研究，中國科學院測量與地球物理研究所博士學位論文，武漢，2000。
- [14] Chao, B. F., Hwang, C. W., Liu, C. C., Pavlis, E. C., Shum, C. K., Tseng, C. L., and Yang, M., "COSMIC: Improving Earth's Gravity Model and Other Geodetic Application," Terr. Atmos. Oceanic Sci., Vol.11, No.1, pp. 365-378, 2000.
- [15] 黃立信，利用低軌衛星負載之定軌資料測定高精度之軌道及地球位模式，國立交通大學土木工程學系研究所博士論文，新竹，2002。
- [16] NSPO home page:<http://www.nspo.gov.tw>.
- [17] Tapley, B. D., Ries, J. C., Davis, G. W., Eanes, R. J., Schutz, B. E., Shum, C. K., Watkins, M. M., Marshall, J. A., Nerem, R. S., Putney, B. H., Klosko, S. M., Lutcke, S.

- B., Pavils, D., Williamson, R. G., and Zelensky, N. P., "Precision orbit determination for TOPEX /POSEIDON," J. Geophys. Res., Vol.99, No.C12, 244405-24419, 1994.
- [18] IERS home page: <http://hpiers.obspm.fr/>
- [19] AlliedSignal Technical Services Corporation, TT&C Subsystem User's Manual, Hsin-Chu, 1997.
- [20] 黃立信、黃金維，"以都卜勒資料改善中華衛星一號軌道"，測量工程，Vol. 43, No. 2, pp. 39-66，2001。
- [21] 陳俊德，以 GEODYN II 模擬精密軌道計算，國立交通大學土木工程學系研究所碩士論文，新竹，1998。
- [22] McCarthy, J. J., GEODYN II System Operation Manual, NASA /Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, U.S.A. Vol. 1-5, 1993.
- [23] Seeber, G., Satellite Geodesy, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.
- [24] GTDS, Mathematical Theory of Goddard Trajectory Determination System, Greenbelt, Maryland, 1976.
- [25] IGS Home Page. <http://igs.cb.jpl.nasa.gov/>.
- [26] Heiskanen, W. A. and Moritz, H., Physical Geodesy, W. H. Freeman & Company, San Francisco, 1967.
- [27] Balmino, G. and Barriot, J. B., "Numerical Integration Techniques Revisted," Manuscripta Geodetica, Vol.15, 1-10, 1989.
- [28] Balmino, G., Perosanz, F., Rummel, R., Sneeuw, N., Sünkel, H., and Woodworth, P., European Views on Dedicated Gravity Field Missions: GRACE and GOCE. ESA Rep. ESD-MAG-REP-CON-001, European Space Agency, 1998
- [29] Colombo, O. L., Altimetry, Orbits, and Tides. NASA TM 86180, Greenbelt, MD, 1984.