

車載自動武器系統射擊精度數值模擬之研究

孫懷谷^{1*} 劉芸田²

¹國防大學理工學院動力及系統工程學系

²國防大學理工學院國防科學研究所

摘 要

自動武器系統主要藉由腳架支撐或架設於載具上，以遂行地面與機動作戰；然而武器射擊時，腳架及載具所產生之振動與變形，將直接影響武器系統之性能發揮。因此，本文擬建立一個結合電腦輔助機構分析與有限元素結構分析之二維數值模型，並運用蒙地卡羅法，藉以模擬分析車載自動武器系統於射擊時之動態行為及射擊精準度，期能縮短武器系統研發階段作業期程及測試製造所需經費，並有效提升設計作業品質與武器系統性能。

關鍵字：蒙地卡羅法，自動武器，拉格朗吉乘數，射擊精度

Numerical Simulation of Firing Precision of Vehicular Mounted Automatic Weapon Systems

Huai-Ku Sun^{1*} and Yun-Tien Liu²

¹*Department of Power Vehicle and Systems Engineering, Chung Cheng Institute of Technology, National Defense University*

²*Graduate School of National Defense Science, Chung-Cheng Institute of Technology, National Defense University*

ABSTRACT

The automatic weapon systems were used to execute the mobile operation and ground tasks via mounted on monopods and vehicles. However, the vibration and deformation of monopods and vehicles would affect the weapon operation performance. This study analyzes the dynamic behavior and firing precision of a automatic weapon system mounted on a four-wheeled vehicle. This work combines a computer-aided analysis of the rigid-body mechanism with finite element analysis of a flexible structure to build up the 2-D computer model for the entire system. The Monte Carlo method is introduced to analyze the fire accuracy of the automatic weapon systems. The purpose of this research is to conserve the duration of operation and financial resources and to promote the quality and performance of weapon design during the R&D phase of weapon systems.

Keywords: Monte Carlo method, automatic weapon, Lagrange multiplier, Firing Precision.

一、前言

武器研發的主要功能需求，是將火力快速而有效率投射至戰場所望地，為達成此一目的，提高武器本身機動性與增加火力投射之精準性，已為武器系統發展之首要目標。本文係針對車載自動武器系統，考量武器本身於射擊過程中，各組件因受到不同性質的作用力，在不同的工作階段表現出不同的運動行為與動力特性，這種特性對於武器操作之可靠性、使用壽命、射擊穩定性與射擊之精準度，皆會產生十分重要的影響，亦為武器設計過程中必須考慮的主要因素[1]。基此，本研究目的係建立一套應用於車載自動武器系統之動態行為分析模型，並配合外彈道公式進行全系統之模擬分析，以提供研發人員在較短時間內，研發與驗證具有理論依據、穩定且可靠之車載自動武器系統，俾提升國軍武器自製研發能量。

經搜整國內、外相關文獻，有關機構運動分析與動力分析之方法，於1980年起至今已發展許多求解方法及數值分析技術，以闡示機構與多體系統之動態行為，並說明剛體機構與可撓體之間耦合原理[2,3]。Kayuk 等[4]以小變形理論描述剛體繫於可撓性桿件之運動近似方程式；康新中等[5]在火炮系統建模理論中，假設火炮及砲座均為剛體，並以能量法求解其運動方程；王放明[6]以集中荷重及能量法求解及處理火炮機構系統動力特性，Hu 等[7]分析有間隙的可撓性旋轉機軸架於柔性軸承座上的動態行為；蔡國平、洪嘉振等[8,9]研究剛體和柔性梁共同組成的剛柔耦合系統之模態與動力特性；Bulman[10]開發一套槍砲動力分析套裝軟體，並將車輛載具模型納入程式開發。綜合上述文獻，有關剛體、可撓體及兩者組合而成之剛柔耦合系統，目前均已發展出成熟且可行之動力分析模式；惟針對車載自動武器系統，結合可撓性腳架以進行整合性數值模擬及射擊精度分析之論著則不多見。

美陸軍武器研發實驗室 Moulton 等[11]曾對自動武器之可撓性三腳架，運用結構分析柔度法建立數學分析模型，並說明自動武器之腳架結構及勁度配置將直接影響武器作戰效能之發揮。Kang [12]對韓國火炮系統曾作成本及操作效率分析，並利用外彈道公式分析子彈運動受重力及風阻之影響；劉啟沼[13]以蒙地卡羅法研究彈著點命中率問題；張進忠等[14]對某一型小口徑槍彈做射擊精度分析。Sun 等[15]針對自

動武器剛性機構繫於可撓性腳架之動態分析，開發出一套數值模擬方法以計算剛體機構與可撓性結構之耦合效應，並模擬彈藥產生之膛壓變異情況，結合外彈道公式及蒙地卡羅法，將彈頭運動過程納入系統模型中進行射擊精度分析。本文係將車輛載具納入自動武器系統進行動態模擬及射擊精度分析，以瞭解車輛載具與腳架支撐對武器系統運作效能之影響。

二、車載自動武器系統模式之建立

2.1 運動方程式

2.1.1 剛體機構運動方程式

剛體機構之運動，係由各組件間透過不同型式的接頭彼此相互連接，其機構運動方程式如下[2]：

$$\begin{bmatrix} [M]_r & [\Phi]_{q_r}^T \\ [\Phi]_{q_r} & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_r \\ -\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{g}_r(t) \\ \underline{\gamma} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $[M]_r$ 為剛體組件之質量矩陣； $[\Phi]_{q_r}$ 為機構運動接頭約束方程式的 Jacobian 矩陣； \ddot{q}_r 為剛體組件的加速度向量； λ 為拉格朗吉乘數向量 (Lagrange multipliers)； $\underline{g}_r(t)$ 為剛體組件所受外力，包含膛壓、彈簧力、阻尼力及重力等； $\underline{\gamma}$ 為速度平方項向量。

2.1.2 可撓性結構有限元素運動方程式

運用有限元素法 (Finite element method) 可有效分析可撓性腳架結構之變形、應力及應變等；其運動方程式如下[16]：

$$[M]_f \ddot{q}_f + [K]_f q_f = \underline{F}_f(t) \quad (2)$$

其中 $[M]_f$ 為可撓性腳架在廣域座標之質量矩陣； $[K]_f$ 為勁度矩陣； $\underline{F}_f(t)$ 為所受外力； q_f 為腳架節點位移與角位移向量； \ddot{q}_f 為節點加速度向量。

2.1.3 車載自動武器系統運動方程式

藉由剛性接頭將剛體機構與可撓體結構相互連接，將(1)式與(2)式合併後，得到車載自動武器之全系統運動方程式如下：

$$\begin{bmatrix} [M] & [\Phi]_q^T \\ [\Phi]_q & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ -\underline{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{g}(t) \\ \underline{\gamma} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

其中 $[M] = \begin{bmatrix} [M]_r & [0] \\ [0] & [M]_f \end{bmatrix}$ 為全系統之質量矩陣，

包含剛體機構與可撓性腳架結構； $\underline{g}(t)$ 為所有作用在剛體與可撓體之外力； $\underline{\lambda}$ 為拉格朗吉乘數向量；

$[K] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K]_f \end{bmatrix}$ 為勁度矩陣；

$\underline{q} = \begin{Bmatrix} q_r \\ q_f \end{Bmatrix}$ 與 $\ddot{q} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{Bmatrix}$ 分別代表位置及加速度向量；

$[\Phi]_q$ 為所有運動接頭(含剛性接頭)約束方程式之 Jacobian 矩陣； $\underline{\gamma}$ 為速度平方項向量。

2.2 射擊精準度與質點彈道理論

火炮武器系統之射擊精度是指武器系統對目標命中能力的一種度量，是從目標或描準點到彈著點之誤差距離，為一種隨機變數。自動武器之射擊精度包括射擊準確度及射擊密集度，射擊準確度是從目標到平均彈著點的距離，係由一系列系統誤差所引起；另射擊密集度亦稱射擊散佈，是平均彈著點到各彈著點的散佈距離，亦為系統隨機誤差所引起。因此，射擊精度將受到全系統各種隨機變數之影響，為武器系統對目標命中效能之指標，亦是武器系統性能與作戰效能之重要參數[17]。

武器系統於發射火藥後，彈頭在空中飛行，受到空氣阻力與重力之作用，會降低彈體飛行速度，並直接影響彈道。本文將彈體視為剛體，模擬子彈受膛壓推力及機構相互運動影響，獲得彈頭離開槍口之運動狀態，再運用膛外彈道公式，推算子彈於空中飛行的時間、速度、軌跡、彈著點分佈情形等；有關膛外彈道運動方程式為[12]：

$$m \frac{dV}{dt} = -m\underline{g} - \frac{1}{2} C \rho A |\underline{V}|^2 \underline{V}_{unit}, \quad (4)$$

其中 m ：彈頭質量； \underline{g} ：重力加速度向量； C ：阻力係數； ρ ：空氣密度； A ：彈頭截面積； \underline{V} 及 \underline{V}_{unit} 為速度向量及速度方向之單位向量。

將彈頭出槍口之位置與速度當作初始條件，計算彈頭飛行軌跡及彈著點。當射擊數量夠多時產生彈著散佈面，再估算彈著點的信賴

區間則可視為射擊精度；而平均彈著點與目標間距離，即為自動武器射擊之準度指標[18]。影響彈著點的因素眾多，本文主要以彈藥膛壓變異性及彈頭出槍口之振動，作為影響射擊精度之因子，藉此分析彈著散佈情況，以瞭解武器系統之設計性能。

蒙地卡羅法(Monte Carlo method)為採用隨機亂數模擬不確定性事件的重要方法，當事件中許多參數為隨機變數，且理論求解過程非常繁複時，蒙地卡羅可有效發揮功用。由於工廠生產彈藥時數量龐大，每批彈藥的膛壓都有期望值及變異數。本文利用中央極限定理，由母體(Population) 隨機選出樣本，若樣本數足夠大時(至少大於 30 個樣本數)，其樣本平均數 \bar{x} 抽樣分配將近似於常態分配，再依大數法則計算信賴區間，使抽樣之樣本性質藉由統計推論方法，取代母體之特性[19]，藉此分析彈著精度與武器系統設計之關聯性。

2.3 車載自動武器系統模型說明

本文以下所述之武器系統模型各相關參數均為假設值，並不代表任何一種型式的武器系統：

2.3.1 自動武器系統

自動武器系統模型主要以前述 Sun 等[15] 研究為基礎，並針對單腳架型態之自動武器進行分析與探討，模型經簡化後其組成包含機箱、槍機、緩衝簧、復進簧、腳架及子彈等六項，模型配置如圖 1 所示，其中機箱與腳架之連接點(節點 3)為剛性接頭(Rigid joint)，剛性接頭以上之各元件均為剛體機構，剛性接頭以下之腳架為可撓性結構，腳架與地面之連接點(節點 1)為固定端(Fixed end)。

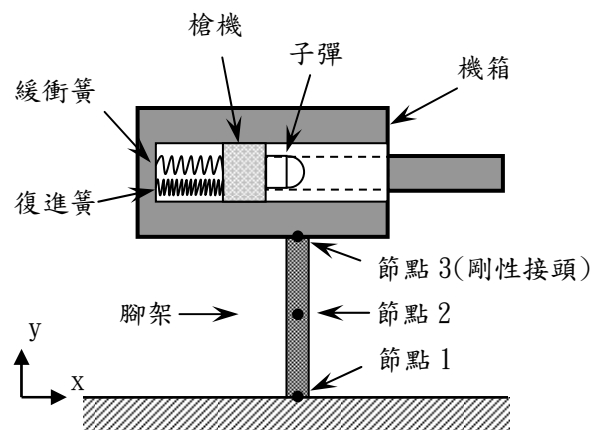


圖 1. 單腳架自動武器平面模型配置圖。

2.3.2 車輛系統

車輛載具模型係主要參考 Bulman [10] 研究之車載火炮系統分析模型，車輛模型簡化後包括車體、前懸吊系統(Suspension)、後懸吊系統及前輪胎、後輪胎等組件，其中懸吊系統係由線彈性彈簧與阻尼器所組成，輪胎為集中質量(Lumped mass)並具有線彈性；本研究將自動武器之腳架固接於車輛頂緣，其中腳架與車體之連接處視為機構分析之剛性接頭，系統模型如圖 2 所示。另有關武器系統、車輛載具及腳架結構之材料性質如表 1、2 所示。腳架於分析時視為 Bernoulli Beam，忽略腳架因剪力變形產生之微量軸向變形，以簡化腳架勁度矩陣與質量矩陣公式。

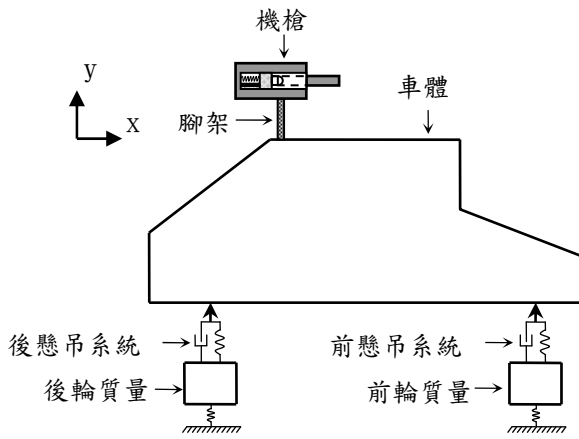


圖 2. 車載自動武器系統之平面模型。

表 1. 車載自動武器系統各組件之材料性質表

區分	質量(kg)	轉動慣量 ($kg \cdot m^2$)	質心位置(m)
機箱	4	0.004	(0.7,1.1)
槍機	1.2	0.0012	(0.55,1.05)
彈頭	0.24	0.0005	(0.65,1.1)
車體	2,400	3,600	(1.8,-1.0)
前輪	50	8.0	(0.2,-1.45)
後輪	50	8.0	(3.5,-1.45)
區分	自由/裝置 長度(m)	彈性常數(Nt/m)	阻尼係數 (Nt.sec/m)
緩衝簧	0.5/0.25	400	50
復進簧	1/0.25	100	—
後懸吊系統	0.2246/0.2	480,000	24,000
前懸吊系統	0.2246/0.2	480,000	24,000
後輪	0.1286/0.1	420,000	—
前輪	0.1286/0.1	420,000	—

表 2. 可撓性腳架相關性質

相關規格	材料特性		
	密度 (kg/m^3)	楊式模數 (Pa)	—
腳架	7900	2.0E11	—
	長度(m)	斷面積 (m^2)	面積慣性距 (m^4)
	0.8	0.0004	3.0E-7
節點座標 (m)	1	2	3
	(1,0)	(1,0.4)	(1,0.8)

2.3.3 射擊模式及機構運動階段劃分

自動武器依據火力需求，可提供不同射擊選擇模式，並區分為單發發射、三發發射或連發射擊，根據連發射擊測試發現，通常只有前兩、三發比較接近射擊目標，第三發之後因受槍口偏移的影響，彈著點離目標有相當距離，形成彈藥浪費。故本文在射擊模式部分針對單發與三發射擊進行模擬分析。

依據自動武器射擊時系統構型之變化，其剛體機構運動可劃分為以下四個連續的動作階段(stage)，且每一階段時間均相當短暫：

- (1) 扣扳機後，復進簧推動槍機向前平移運動直到擊發位置。
- (2) 彈藥擊發，立即產生膛壓，彈頭受膛壓向前推力，脫離槍機約束，並沿槍管方向運動，直到出槍口為止，此階段槍機亦受膛壓作用向後推力，速度驟減為零，並向後運動。
- (3) 當彈頭出槍口時，膛壓立即消失，此時槍機本身受慣性力作用大於復進簧推力，槍機仍然向後運動，當槍機持續壓縮復進簧，槍機將退回到原備發位置。
- (4) 槍機受慣性力作用持續後退，此時緩衝簧開始作用，故槍機同時壓縮復進簧與緩衝簧，致始槍機速度驟減，當槍機相對於機箱的速度為零時，復進簧與緩衝簧同步開始伸長，並將槍機推回到備發位置。

2.3.4 系統構型、自由度分析與約束條件建立

全系統構型在剛體部分共具有 7 個剛體(Rigid body)、2 個平移接頭(Translational joint)、1 個組合接頭(Composite joint)及 2 個剛性接頭，其中一個平移接頭負責連接「槍機—機箱」、另一個平移接頭連接「子彈—機箱」，組合接頭負責連接「槍機—子彈」，2 個剛性接頭如前述連接剛體與可撓體結構，而不同型式的運動接頭則有不同的約束條件與相對應之約束方程式。系統自由度係以每個二維剛體元件具

有 3 個自由度(x_i 、 y_i 、 ϕ_i)計算。可撓體部分本文簡化地將單腳架分割為 2 個有限元素之平面樑元素(Beam element)及 3 個節點，每個節點具有 3 個自由度(x_f 、 y_f 、 ϕ_f)，因此全系統合計自由度共有 30 個；若在無車載情況下，則系統的自由度為 18 個，如表 3 所示。

表 3. 系統構型與自由度分析表

區分	剛體機構			剛體數目	可撓性腳架節點 (node) 數目	合計自由度***
	運動接頭(joint)數目					
	平移接頭	組合接頭*	剛性接頭			
自動武器系統 (圖 1)	2	1	1	3	3	18
車載自動武器系統 (圖 2)	2	1	2	7**	3	30

*組合接頭(Composite joint)：亦為「組合旋轉-平移接頭」(Composite revolute-translational joint)。
**剛體數目包括地面剛體(Ground body)。
***合計自由度未扣列各運動接頭之約束方程式數目。

當自動武器射擊開始，系統內部運作構件將隨著各階段不同的動作需求而改變，第一階段復進簧開始伸長，緩衝簧並未作用，故實際作用彈簧數量僅 5 個（含車輛模型中 4 個彈簧）；第二階段子彈與槍機分離，但仍在槍管內，組合接頭數量減少一個；第三階段子彈出槍口，並與系統分離，故剛體數量減少一個，平移接頭亦減少一個；第四階段緩衝簧開始作用，彈簧數量增加一個，各階段內部運作組件分析詳如表 4。

表 4. 車載自動武器系統射擊各階段內部運作組件數量表

區分	彈簧數量	剛體數量	平移接頭	組合接頭	剛性接頭
第一階段	5	7	2	1	2
第二階段	5	7	2	0	2
第三階段	5	6	1	0	2
第四階段	6	6	1	0	2

機構系統運動時，剛性接頭約束條件及其方程式的建立，係考量無論在任一時間，剛體於該連接點之移動位移及轉動位移，均與其相連接之可撓體節點位移相同，故每個剛性接頭有三個約束方程式，有關約束方程式 Φ 及相關之 Jacobian 矩陣 $[\Phi]_q$ 與速度平方項向量 $\dot{\gamma}$ 之推導，詳如表 5 及表 6 所示。另每個平移接頭有二個約束方程式，每個組合接頭有一個約束方

程式，其相對應之約束方程式、Jacobian 矩陣與速度平方項向量係參考 Nikravesh, P. E.[2]所推導之數學式，如表 7 及表 8 所示。

表 5. 剛性接頭之約束方程式 Φ

$\Phi^{(1)}$	$x_i + \xi_i^P \cos \phi_i - \eta_i^P \sin \phi_i - x_f = 0$
$\Phi^{(2)}$	$y_i + \xi_i^P \sin \phi_i + \eta_i^P \cos \phi_i - y_f = 0$
$\Phi^{(3)}$	$(\phi_i - \phi_f) - (\phi_{i0} - \phi_{f0}) = 0$
說明	<p>1. x、y 為廣域座標 (Global coordinate)；ξ、η 為固定在剛體上且隨剛體運動之區域座標 (Body-fixed coordinate)。</p> <p>2. 上標 P (或 Q) 表示剛體運動接頭之參考點，下標 i (或 j) 表示剛體編號，下標 f 表示可撓體節點。</p>

表6. 剛性接頭之Jacobian矩陣 $[\Phi]_q$ 及速度平方項向量 $\underline{\gamma}$

區分	$[\Phi]_q = \frac{\partial}{\partial \underline{q}} [\Phi]$						$\underline{\gamma}$
	$\partial\Phi / \partial x_i$	$\partial\Phi / \partial y_i$	$\partial\Phi / \partial \phi_i$	$\partial\Phi / \partial x_f$	$\partial\Phi / \partial y_f$	$\partial\Phi / \partial \phi_f$	
$\Phi^{(1)}$	1	0	$-(y_i^P - y_i)$	-1	0	0	$(x_i^P - x_i)\dot{\phi}_i^2$
$\Phi^{(2)}$	0	1	$(x_i^P - x_i)$	0	-1	0	$(y_i^P - y_i)\dot{\phi}_i^2$
$\Phi^{(3)}$	0	0	1	0	0	-1	0
說	<p>1. 二維座標轉換公式為：$\begin{Bmatrix} x_i^P \\ y_i^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_i^P \\ \eta_i^P \end{Bmatrix} .$</p> <p>2. 由剛性接頭之約束方程式及二維座標轉換公式，可獲得：</p> $\partial\Phi^{(1)} / \partial \phi_i = -\xi_i^P \sin \phi_i - \eta_i^P \cos \phi_i = -(y_i^P - y_i)$ $\partial\Phi^{(2)} / \partial \phi_i = \xi_i^P \cos \phi_i - \eta_i^P \sin \phi_i = (x_i^P - x_i)$ <p>3. 速度平方項向量$\underline{\gamma}$之推導過程如下：</p>						
明	$\underline{\gamma} = -\frac{\partial}{\partial \underline{q}} \{ [\Phi]_q \underline{\dot{q}} \} \underline{\dot{q}}$ $= -\frac{\partial}{\partial \underline{q}} \begin{bmatrix} \dot{x}_i & 0 & -(y_i^P - y_i)\dot{\phi}_i & -\dot{x}_f & 0 & 0 \\ 0 & \dot{y}_i & (x_i^P - x_i)\dot{\phi}_i & 0 & -\dot{y}_f & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\phi}_i & 0 & 0 & -\dot{\phi}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\phi}_i \\ \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{\phi}_f \end{Bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & (x_i^P - x_i)\dot{\phi}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (y_i^P - y_i)\dot{\phi}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\phi}_i \\ \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{\phi}_f \end{Bmatrix}$ $= \begin{Bmatrix} (x_i^P - x_i)\dot{\phi}_i^2 \\ (y_i^P - y_i)\dot{\phi}_i^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$						

表7. 平移接頭之約束方程式 $\Phi^{(t,2)}$ 、Jacobian矩陣 $[\Phi]_q$ 及速度平方項向量 $\underline{\gamma}$

區分	$\Phi^{(t,2)} = \begin{bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_i^P - x_i^Q)(y_j^P - y_j^Q) - (y_i^P - y_i^Q)(x_j^P - x_j^Q) \\ \phi_i - \phi_j - (\phi_i^0 - \phi_j^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$					
	$[\Phi]_q = \frac{\partial}{\partial \underline{q}} [\Phi]$					
	$\partial\Phi / \partial x_i$	$\partial\Phi / \partial y_i$	$\partial\Phi / \partial \phi_i$	$\partial\Phi / \partial x_j$	$\partial\Phi / \partial y_j$	$\partial\Phi / \partial \phi_j$
$\Phi^{(1)}$	$(y_i^P - y_i^Q)$	$-(x_i^P - x_i^Q)$	$-(x_j^P - x_i)(x_i^P - x_i^Q)$ $-(y_j^P - y_i)(y_i^P - y_i^Q)$	$-(y_i^P - y_i^Q)$	$(x_i^P - x_i^Q)$	$(x_j^P - x_j)(x_i^P - x_i^Q)$ $+(y_j^P - y_j)(y_i^P - y_i^Q)$
$\Phi^{(2)}$	0	0	1	0	0	-1
	$\underline{\gamma} = -\frac{\partial}{\partial \underline{q}} \{ [\Phi]_q \underline{\dot{q}} \} \underline{\dot{q}}$					
$\Phi^{(1)}$	$-2[(x_i^P - x_i^Q)(\dot{x}_i - \dot{x}_j) + (y_i^P - y_i^Q)(\dot{y}_i - \dot{y}_j)]\dot{\phi}_i$ $-[(x_i^P - x_i^Q)(\dot{y}_i - \dot{y}_j) - (y_i^P - y_i^Q)(\dot{x}_i - \dot{x}_j)]\dot{\phi}_i^2$ <p style="text-align: center;">, 其中 $\dot{\phi}_i = \dot{\phi}_j$</p>					
$\Phi^{(2)}$	0					

表8. 組合接頭之約束方程式 $\Phi^{(r-t,1)}$ 、Jacobian矩陣 $[\Phi]_q$ 及速度平方項向量 $\underline{\gamma}$

區分	$\Phi^{(r-t,1)} = \Phi^{(1)} = (x_j^Q - x_i^P)(y_j^Q - y_j^P) - (y_j^Q - y_i^P)(x_j^Q - x_j^P) = 0$					
	$[\Phi]_q = \frac{\partial}{\partial \underline{q}} [\Phi]$					
	$\partial\Phi / \partial x_i$	$\partial\Phi / \partial y_i$	$\partial\Phi / \partial \phi_i$	$\partial\Phi / \partial x_j$	$\partial\Phi / \partial y_j$	$\partial\Phi / \partial \phi_j$
$\Phi^{(1)}$	$(y_j^P - y_j^Q)$	$-(x_j^P - x_j^Q)$	$-(y_i^P - y_i)(y_j^P - y_j^Q)$ $-(x_i^P - x_i)(x_j^P - x_j^Q)$	$-(y_j^P - y_j^Q)$	$(x_j^P - x_j^Q)$	$(y_i^P - y_j)(y_j^P - y_j^Q)$ $+(x_i^P - x_j)(x_j^P - x_j^Q)$
	$\underline{\gamma} = -\frac{\partial}{\partial \underline{q}} \{ [\Phi]_q \underline{\dot{q}} \} \underline{\dot{q}}$					
$\Phi^{(1)}$	$[(x_i^P - x_i)(y_j^P - y_j^Q) - (y_i^P - y_i)(y_j^P - y_j^Q)](\dot{\phi}_i - 2\dot{\phi}_j)\dot{\phi}_i$ $+[(x_i^P - x_j)(y_j^P - y_j^Q) - (y_i^P - y_i)(x_j^P - y_j^Q)]\dot{\phi}_j^2$ $-2[(x_j^P - x_j^Q)(\dot{x}_i - \dot{x}_j) + (y_j^P - y_j^Q)(\dot{y}_i - \dot{y}_j)]\dot{\phi}_j$					

三、數值模擬分析

本文以參考 Nikraves, P. E.[2]發展之剛體機構動力分析程式 DAPFOR 為基礎架構,增列自行發展之剛性接頭約束方程式,並完整結合剛體機構之運動方程式及可撓性結構有限元素運動方程式,再考量自動武器射擊各階段之起始終止條件,據以發展適用於全系統運動與動力分析之電腦程式,並就架設於車輛上之自動武器系統,增加隨機性的膛壓力及配合質點彈道理論,以有效模擬車載自動武器系統的射擊運動過程、動態行為及剛柔耦合效應等,並探討車輛載具、腳架變形對槍枝設計與射擊精準度之影響。

3.1 單發射擊之動態響應

3.1.1 射角 0 度

假設射角為 0 度,發射藥氣體推力為 2,000Nt,腳架以有限元素法平面樑元素模擬之,全系統運動方程式採用 4 階 Runge-Kutta 數值積分法求解,考量每發射擊過程歷經的時間極為短暫,故進行數值積分時所設定的時間步距(Time step size),將影響解析結果之穩定性;本研究時間步距嘗試從 1.0×10^{-3} 秒至 1.0×10^{-5} 秒進行積分求解,結果顯示當時間步距大於 1.0×10^{-4} 秒,積分誤差(Truncation error)將不斷累積,造成積分結果產生錯誤,並違背機構運動的約束條件,圖 3.所示為槍機速度-時間圖,當時間步距為 5.0×10^{-5} 秒及 1.0×10^{-5} 秒,兩者均呈現穩定相似的模擬結果,然當時間步距為 1.0×10^{-4} 秒則呈現不穩定的模擬結果。由於子彈於槍膛內運動時間極為快速,本研究採用積分時間步距為 1.0×10^{-5} 秒。

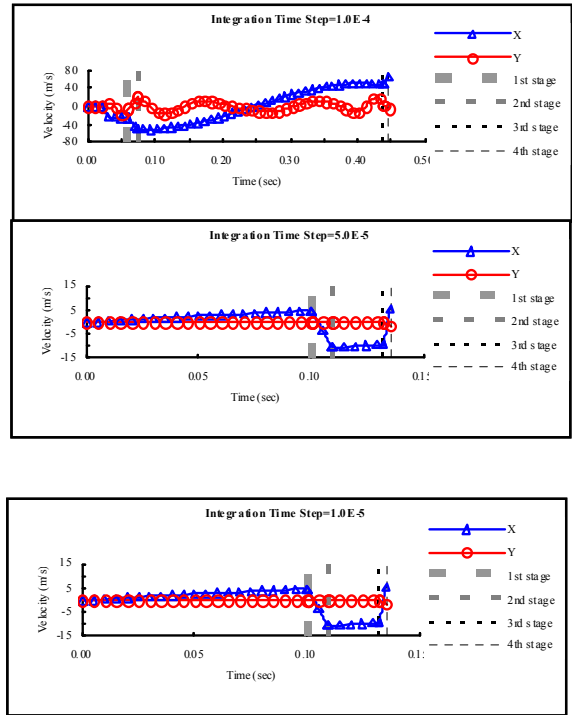


圖 3. 槍機速度之不同積分時間步距穩定性分析圖。

模擬結果單發射擊所耗用時間為 0.1353 秒,各階段運動時間,第一階段為 0.1003 秒,第二階段 0.0092 秒,第三階段 0.0228 秒,第四階段 0.0030 秒,各組件分析如下:

槍機組件之運動速度-時間曲線如圖 4 所示,顯示槍機在各階段因受力情況不同,以致呈現不同的曲率變化,其中第一階段槍機僅受復進簧向前推力作用,故斜率為正且數值較小;第二階段槍機受復進簧前推及膛壓後推同時作用,且膛壓力甚大,故斜率為負;第三階段僅復進簧作用,故斜率與第一階段近似;第四階段復進簧與緩衝簧同時作用,斜率為正,且數值較大,當射擊結束時槍機仍有向前速度。另槍機運動軌跡如圖 5 所示,顯示射擊第四階段結束,槍機雖已回到系統內部相對備發位置,但就廣域座標而言,並未回到發射前之初始位置,此為機構中各組件之相互耦合作用影響所致。

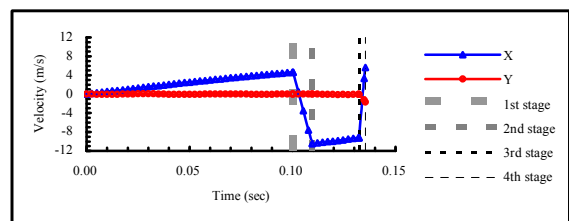


圖 4. 槍機於單發點放射擊時之速度-時間圖。

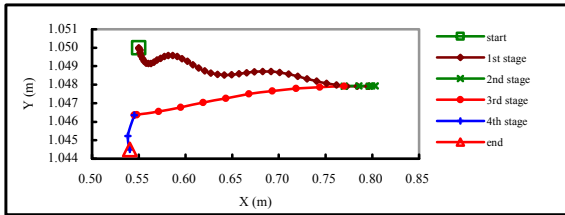


圖 5. 槍機於單發點放射擊時之運動軌跡圖。

機箱組件之位移—時間曲線如圖 6 所示，顯示機箱射擊時產生上下及前後之運動，且前後運動幅度較大，其中第四階段機箱因受復進簧與緩衝簧向後推力同時作用，其位移量明顯增大。機箱之運動軌跡如圖 7 所示，機箱於射擊結束之位置與射擊開始時比較，呈現向後、向下之位移，此現象與實彈射擊時射手所感受之後座力相符。

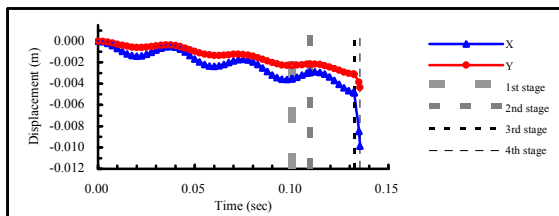


圖 6. 機箱於單發點放射擊時之位移—時間圖。

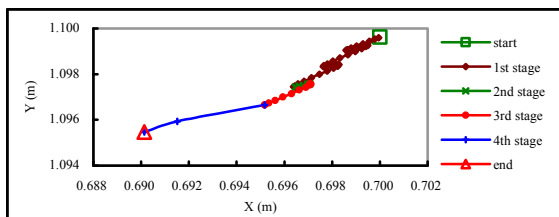


圖 7. 機箱於單發點放射擊時之運動軌跡圖。

圖 8 顯示車輛、機箱及剛性接頭(節點 3)之角位移—時間圖，其中車輛角位移為逆時針旋轉之平滑曲線，機箱角位移一直跟隨著車輛角位移呈現上下轉動，此一現象說明車輛系統本身直接影響武器系統之射擊精準度。同時圖 8 中亦顯示剛性接頭(Node3)之角位移與機箱(Receiver)之角位移在任一時間均完全相同，此一結果驗證了本文所建構之系統運動方程式、剛性接頭之約束條件及電腦程式撰擬均符合機構運動之諧和要求與正確性。

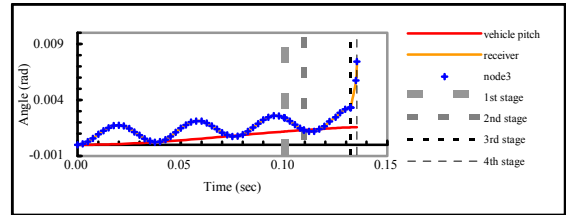


圖 8. 車體、機箱及剛性接頭(節點 3)於單發射擊時之角位移圖。

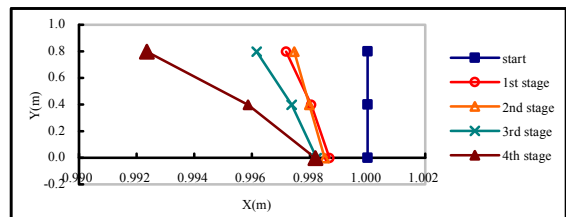


圖 9. 腳架於單發射擊時之節點位移圖。

3.1.2 射角 10 度

射角調整係以節點 3 為轉軸中心，將機箱逆時針俯仰旋轉 10 度，其他輸入條件均不變的情況下，模擬結果射擊所耗用時間為 0.1368 秒，與射角 0 度時使用時間(0.1353 秒)稍有差異，各階段運動時間，第一階段為 0.1021 秒，第二階段 0.0093 秒，第三階段 0.0224 秒，第四階段 0.0030 秒，各組件分析如下：

槍機組件之運動速度—時間曲線如圖 10 所示，運動軌跡如圖 11 所示，與射角 0 度時槍機運動情形(圖 4、圖 5)相互比較，顯示在 x 方向之運動速度及運動軌跡均縮小，在 y 方向之運動速度及運動軌跡均擴大。

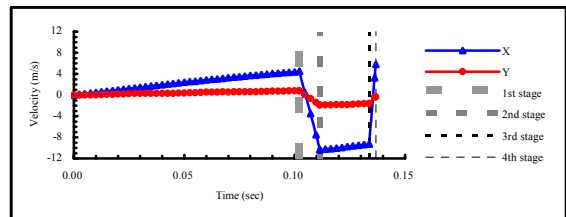


圖 10. 槍機於單發點放射角 10 度之速度—時間圖。

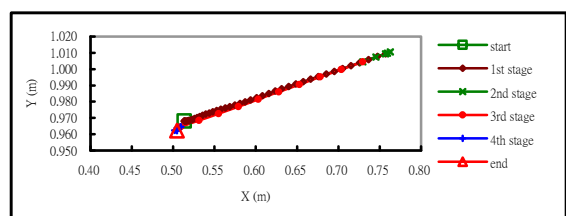


圖 11. 槍機於單發點放射角 10 度之運動軌跡圖。

機箱組件於射角 10 度情況下，在 x 方向之運動速度及運動軌跡與射角 0 度(圖 6、圖 7)比

較亦相對減小，在 y 方向則相對增加，如圖 12 及圖 13 所示。

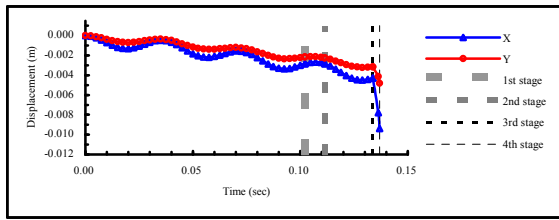


圖 12. 機箱於單發點放射角 10 度之位移—時間圖。

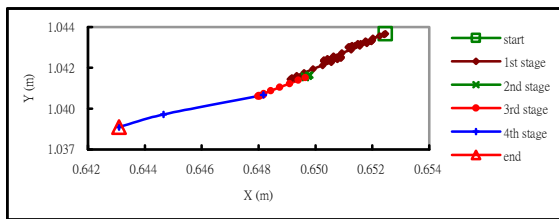


圖 13. 機箱於單發點放射角 10 度之運動軌跡圖。

圖 14 為車體、機箱及剛性接頭(節點 3)於射角 10 度之角位移圖，其中機箱(receiver)角位移已扣除初始角位移(0.174533 rad)，顯示節點 3(剛性接頭)之角位移在任一時間均與機箱角位移相同，符合本機構運動之約束條件；另機箱角位移亦隨著車體角位移呈現上下振動現象，與射角 0 度(圖 8)之情況相似。

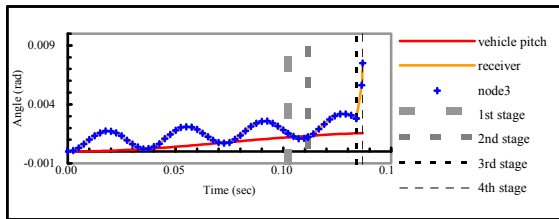


圖 14. 車體、機箱及剛性接頭(節點 3)於單發點放射角 10 度之角位移圖。

圖 15 為可撓性腳架的上中下三個節點於射角 10 度之位移圖，顯示於射擊過程中腳架產生結構變形與運動位移，各階段節點變位量與射角 0 度之變位量(圖 9)相近。

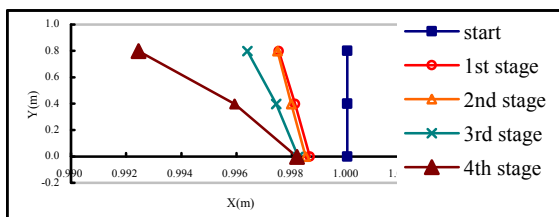


圖 15. 腳架於單發點放射角 10 度之節點位移圖。

3.2 三發連續射擊之動態響應

模擬三發連續射擊之初始條件與單發射擊相同，在射角 0 度情況下，模擬結果所耗用時間為 0.3086 秒，其中第一發(1st round)為 0.1353 秒，第二發(2nd round) 0.0873 秒，第三發(3rd round) 0.0860 秒，各發射擊時間差異之原因，係在連發射擊模式下，當前發射擊完畢，各組件運動姿態會影響下一發射擊結果，摘要分析如下：

槍機射擊時之速度—時間曲線如圖 16 所示，第一發射擊完畢之速度將為第二發射擊之初始速度，第三發亦然；槍機運動軌跡如圖 17，顯示第二發及第三發上下位移量明顯增加。

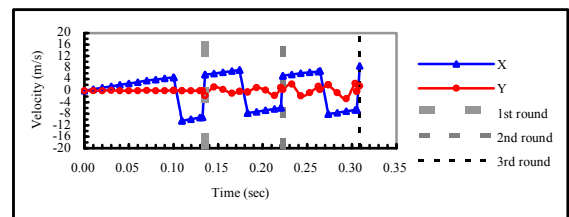


圖 16. 槍機於三發連放射擊時之速度—時間圖。

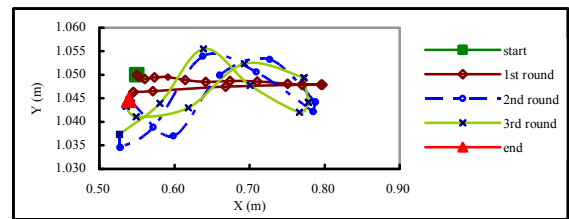


圖 17. 槍機於三發連放射擊時之運動軌跡圖。

車輛、機箱及剛性接頭之角位移—時間圖如圖 18，腳架節點變位圖如圖 19 所示，其中第二發及第三發之位移量明顯增加，顯示在連發射擊時，剛性機構運動與可撓性結構變形兩者互制產生之剛柔耦合效應將更趨明顯。

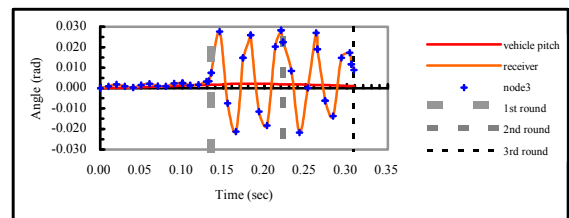


圖 18. 車輛、機箱及剛性接頭(節點 3)於三發連射時之角位移圖。

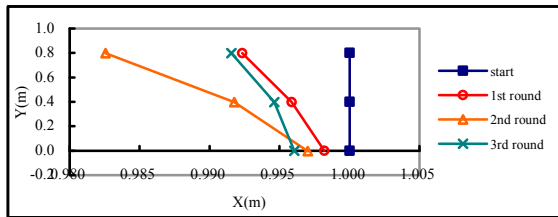


圖 19. 腳架於三發連射時之節點位移圖。

表9. 機箱於三發連放射角0度之最大轉動角位移在有車載與無車載之比較表。

區分	第一發 (rad)	第二發 (rad)	第三發 (rad)
無車載 (僅腳架)	0.0019	0.0260	0.0171
有車載 (含腳架)	0.0033	0.0283	0.0224

車載自動武器系統在三發連放射角 0 度時，機箱轉動角位移之最大值為：第一發 0.0033(rad)、第二發 0.0283(rad)、第三發 0.0224(rad)；若在無車載情況下進行模擬射擊，機箱轉動角之最大值為第一發 0.0019(rad)、第二發 0.0260(rad)、第三發 0.0171(rad)，顯示在有車載情況下，各發之機箱轉動角位移均較大，且有車載之第一發角位移增量將近 2 倍，故自動武器掛載在車輛上，車輛結構本身對自動武器第一發射擊影響較大，如表 9 所示。

3.3 射擊精準度分析

當發射藥氣體推力 2,000Nt 為固定值，且在不考慮槍口振動的條件下射擊，可依據彈道公式計算彈頭出槍口後與水平座標(X 軸)之相交處即為「表尺射程」。另根據線性誤差率 (Linear Error Probable) 應用於武器效能評估時，訂定 50% 為武器系統的誤差率[20]，亦即砲兵針對射擊精度所謂「半數必中界」，故本文在評估射擊精度範圍時，係以 50% 信賴水準進行分析比較，假設發射藥氣體推力之期望值為 2,000Nt，標準差為 25Nt 模擬射擊，並以不同射角各模擬射擊 100 次。

3.3.1 射角 0 度

當射角為 0 度時，表尺射程理論值為 39.31 公尺，在單發點放射擊模式下，模擬 100 次射擊結果經統計，彈著點散佈平均值為 39.77 公尺，稍大於表尺射程(準度為 0.46 公尺)，此係彈頭出槍口時(射擊第二階段)，機箱受車輛與腳

架振動之影響，槍口產生向上仰之角位移所致。若將彈著點範圍最大值與最小值進行分區次數統計，如圖 20 所示，彈著點呈現近似常態分配情況，故在實彈射擊時，射手可藉由調整射表，以增加射擊之準確度。

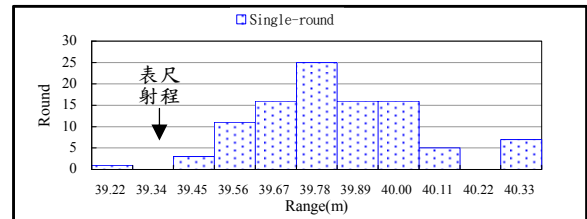


圖 20. 單發點放射角 0 度射擊彈著點分區次數統計表。

在三發連放射擊模式下，模擬射擊 100 次 (300 發) 結果如圖 21 所示，第一發彈著點平均值為 39.79 公尺，稍大於表尺射程(準度為 0.48 公尺)，分佈情況亦近似常態分配；第二發彈著點散佈範圍，最小值、最大值分別為 56.35 及 63.20 公尺，未含蓋表尺射程，故準度相當差；第三發發彈著點範圍(22.58—50.74 公尺)雖已含蓋表尺射程，但散佈面太廣，故精度不良。

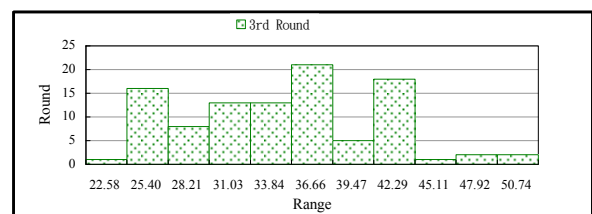
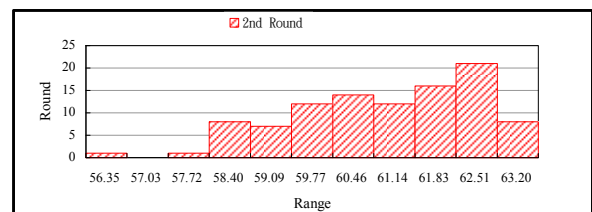
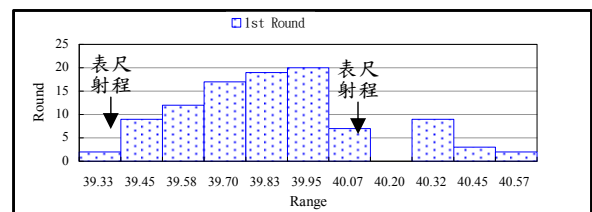


圖 21. 三發連放射角 0 度射擊彈著點分區次數統計表。

3.3.2 射角 10 度

當射角為 10 度時，表尺射程值為 194.41 公尺，在單發點放射擊模式下，模擬 100 發射擊結果如圖 22 所示，彈著點散佈平均值為

196.08 公尺，大於表尺射程 1.67 公尺，彈著點散佈範圍為(191.61-199.94)公尺，雖含蓋表尺射程；惟在 50%信心水準下之信賴區間為(195.96-196.19)公尺，並未含蓋表尺射程，故實彈射擊時可藉由微幅調整射表，以提升射擊精準度。

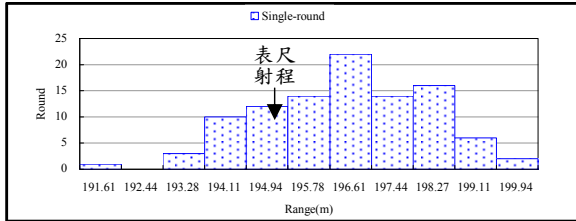


圖 22. 單發點放射角 10 度射擊彈著點分區次數統計表。

在三發連放射擊模式下，模擬射擊 100 次(300 發)結果如圖 23 所示，其中第一發彈著點平均值為 196.07 公尺，較表尺射程(194.41 公尺)多 1.66 公尺，彈著點散佈範圍為(191.09-201.97)公尺，含蓋表尺射程；在 50%信心水準下之信賴區間為(195.64-196.49)公尺，未含蓋表尺射程。第二發彈著點散佈範圍為(202.41-214.40)公尺，未含蓋表尺射程；第三發彈著點散佈範圍為(198.43-211.53)公尺，亦未含蓋表尺射程，精準度均不佳。

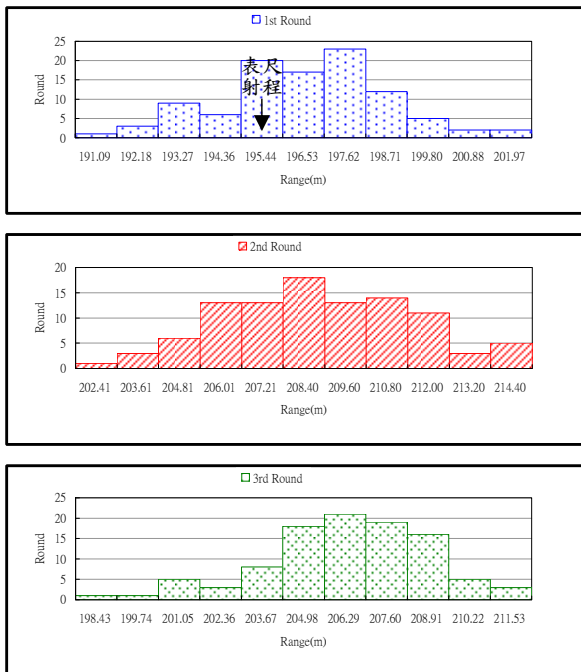


圖 23. 三發連放射角 10 度射擊彈著點分區次數統計表。

3.3.3 車輛對射擊精準度之影響分析

比較自動武器在有車載及無車載(僅腳架支撐)的兩種情況下進行模擬射擊，於單發點放及不同射角之彈著點模擬統計如表 10，顯示在有車載狀況下武器系統之射擊準確度較無車載狀況下為差，然兩者之射擊精度(50%信賴區間大小)則相當接近，說明了車輛對武器系統射擊之準確度有較顯著之影響。

表 10. 彈著點散佈統計表

區分\射角(度)	0	10	20	30	45	50		
表尺射程(m)	39.31	194.41	307.49	371.03	392.67	389.21	376.73	
有車載	模擬平均數	39.77	196.08	309.57	372.24	393.32	389.63	376.62
	準確度	0.46	1.67	2.07	1.22	0.65	0.42	-0.11
	最大值	40.33	199.94	315.56	378.55	399.62	395.73	382.45
	最小值	39.22	191.61	303.49	365.30	386.33	382.81	370.18
	變異數	0.05	2.86	5.68	6.94	6.86	6.42	5.90
	標準差	0.22	1.69	2.38	2.63	2.62	2.53	2.43
	50%信賴區間	0.03	0.23	0.32	0.36	0.35	0.34	0.33
無車載	模擬平均數	38.95	194.90	309.01	371.94	393.31	389.77	376.92
	準確度	-0.36	0.50	1.52	0.91	0.64	0.56	0.18
	最大值	39.67	199.02	314.69	378.29	399.62	395.88	382.81
	最小值	38.47	190.70	302.85	364.95	386.32	382.99	370.47
	變異數	0.06	2.91	5.35	6.83	6.87	6.52	5.87
	標準差	0.24	1.70	2.31	2.61	2.62	2.55	2.42
	50%信賴區間	0.03	0.23	0.31	0.35	0.35	0.34	0.33

四、結論

本研究運用電腦輔助機構分析、有限元素法、蒙地卡羅法及外彈道理論等，發展一套系統性的方法，成功地結合有限元素法與剛體機構分析理論，將其運用於車載自動武器系統之模擬分析，除能了解與及時監控多剛體機構與可撓性結構間耦合情況兩者間動態行為外，另可計算射擊精準度等重要參數，結果顯示本數值模擬方法是可行的。

本研究不僅將剛性接頭運用在「武器-腳架」銜接上，更進一步擴大運用在「武器-腳架-車輛載具」之整體系統模擬上，證明剛性接頭可有效率地運用在較為複雜「剛柔耦合」問題之研究分析。

在「三發連放」射擊模式下，第二發及第三發射擊時機箱之振動幅度與腳架變位均較第一發射擊明顯增加，此與模擬彈著點散佈之第二發後射擊精準度明顯下滑之結果相符。另由模擬結果顯示，自動武器系統在無車載情況，僅以腳架支撐下進行射擊，其射擊精準度較佳，有車載情況下射擊精準度較差，以上說明了自動武器系統於射擊時其支撐系統及射擊模式將直接影響武器作戰效能之發揮。

本文建立了一套車載自動武器系統的分析

模型，並將剛性接頭成功地應用於分析模型中，本模型可提供研發人員在武器設計階段進行數值模擬驗證，除有利於武器系統之最佳化設計，並對節省研發經費及縮短研發作業期程均有所助益。

參考文獻

- [1] 徐誠，王應平，火炮與自動武器動力學，北京理工大學出版社，北京，第一章，第 1-6 頁，2006。
- [2] Nikravesh, P. E., Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp.370, 1988.
- [3] Shabana, A. A., Dynamics of Multibody Systems, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp.470, 1989.
- [4] Kayuk, Y. F. and Pyatov, A. L., "Motion of a Rigid Body Hinged to a Deformable Rod," Soviet Applied Mechanics, Vol. 25, No. 11, pp. 1139-1146, 1990.
- [5] 康新中、馬春茂、魏孝達，火炮系統建模理論，國防工業出版社，北京，第一章，第七節，第 41-49 頁，2003。
- [6] 王放明，隨機動力學及其在兵器中的應用，國防工業出版社，北京，第四章，第 95-110 頁，2000。
- [7] Hu, K., Mourelatos, Z. P., and Vlahopoulos, N., "Computational Analysis for Dynamic Response of a Rotating Shaft on Flexible Support Structure with Clearances," Journal of Sound and Vibration, Vol. 267, Issue 1, pp. 1-28, 2003.
- [8] 蔡國平、洪嘉振，"中心剛體-柔性懸臂梁系統的動力特性研究"，航空學報，第 25 卷，第 3 期，第 248-253 頁，2004 年 5 月。
- [9] 楊輝、洪嘉振、余征躍，"一類剛-柔耦合系統的模態特性與實驗研究"，宇航學報，第 23 卷，第 2 期，第 67-72 頁，2002 年 3 月。
- [10] Bulman, D.N., "The Effects of Vehicle and Barrel Motion on the Accuracy of a Repeat Fire Small Cannon," Proceedings of the Eighth U.S. Army Symposium on Gun Dynamics, pp.1-1-1-12, Newport, Rhode Island, 14-16 May 1996.
- [11] Moulton, P. B., Holland, R. S., Generalized Mathematical Model of a Machine Gun Tripod Mount, Technical Report, Weapons Laboratory at Rock Island, U. S. Army Weapons Command, pp.1-7, April 1972.
- [12] Kang, C., A Cost And Operational Effectiveness Analysis For Future Artillery System in Korea, Naval Postgraduate School Monterey, California, Ms. Thesis, Chap. 5, pp. 25-51, 1995.
- [13] 劉啟沼，"瑞雷分配一彈著點命中率之研究"，軍品科技新知，第 105 卷，第 29-38 頁，1998。
- [14] 張進忠、宋衛東，"某一型槍彈射擊精度分析"，軍械工程學院學報，第 14 卷，第 2 期，第 30-33 頁，2002。
- [15] Sun, H.K., Chen, C.G., and Shen, Y.C., "Dynamic Analysis of Rigid-Body Mechanisms Mounted on Flexible Support Structures — Planar Case," Journal of Mater. Sci. Forum, Vols. 505-507, pp.589-594, 2006.
- [16] Yang, T. Y., Finite Element Structural Analysis, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1986.
- [17] 郭錫福，遠程火炮武器系統射擊精度分析，國防工業出版社，北京，第一章，第 1-6 頁，2004。
- [18] 步兵近戰武器論證參考編寫組，步兵近戰武器論證參考，國防工業出版社，北京，第 570-574 頁，1992。
- [19] Anderson, D. R., Sweeney, D. J., and Williams, T. A., Statistics for Business and Economics, Info Access & Distribution Pte Ltd, Singapore, pp. 849, 1994.
- [20] Przemienjecki, J. S., Mathematical Methods in Defense Analyses, American Institute of Aeronautics, Inc., Reston, Virginia, pp. 28-31, 2000.

