

# 求解附帶任意個集中元素與簡支撐跨距的均勻樑之自然 頻率及振態的正解

鄭耀輝 王紀瑞\* 陳茂林 洪振豪

建國科技大學自動化系暨機電光系統研究所

## 摘 要

首先由無拘束(即未附帶任何集中質量、線性彈簧和簡支撐跨距)的均勻樑之運動方程式，吾人可得含有四個積分常數的特徵函數，將此特徵函數代入每一個集中質量、線性彈簧和簡支撐跨距之附著點的三個相容方程式與一個力平衡方程式中，則得一組聯立方程式。同樣的，將特徵函數分別代入樑之左端與右端的邊界條件方程式中，吾人亦可分別得到另一組聯立方程式。將上述所有的聯立方程式寫成矩陣的形式，則得一特徵值方程式。求解 $|B|=0$ 可得有拘束的均勻樑附帶  $n$  個集中質量、線性彈簧和簡支撐跨距的自然頻率  $\omega_j$  ( $j=1, 2, \dots$ )。將每一自然頻率代入特徵方程式後，可得其對應的積分常數值，將此積分常數值代入每一個集中質量、線性彈簧和簡支撐跨距之附著點的特徵函數中，即得對應之振態。

**關鍵字：**集中質量，線性彈簧，簡支撐跨距，均勻樑

## Exact Solutions for the Natural Frequencies and Mode Shapes of the Uniform Beams Carrying Any Number Concentrated Elements and in-span support

Yaug-Fea Jeng, Jee-Ray Wang, Mao-Lin Chen, and Jeen-Hao Hung

<sup>1</sup> *Department of Automation Engineering & Institute of Mechatronic Systems  
Chienkuo Technology University*

## ABSTRACT

From the motion equation of the “bare” uniform beam (without any concentrated masses, linear springs and in-span support), an eigenfunction consisting of four integration constants is obtained. Where the last eigenfunction is substituted into the three compatible equations, one force-equilibrium equation for each attaching point of the concentrated element, and the boundary equations for the two ends of the beam, a matrix equation of the form  $[B]\{C\}=0$  is got. The solutions of  $|B|=0$  (where  $|\cdot|$  denotes a determinant) give the “exact” natural frequencies of the “constrained” beam (carrying any number of concentrated masses, linear springs and in-span support) and the substitution of each corresponding values of  $\{C\}$  into the associated eigenfunction for each attaching points will determine the corresponding mode shapes.

**Keywords:** concentrated masses, linear springs, in-span support, uniform beam

文稿收件日期 100.5.9; 文稿修正後接受日期 101.12.6; \*通訊作者  
Manuscript received May 9, 2011; revised December 6, 2012; \*Corresponding author

## 一、前言

對於從事機械、造船、航空、土木或車輛的工程師而言，經常要考慮到構件及附著於其上之重要裝備(諸如電子儀表、引擎、馬達、雷達、振盪器等)遭遇振動時所受之影響，因此求解這些附帶集中元素與簡支撐跨距的各類集中元素之振動構件的自然頻率及其對應之振態遂成為一重要的課題。

在已知的文獻中，有關於「均勻」的 Euler 樑附帶各類集中元素(如：集中質量、集中質量慣性矩、線性彈簧、扭轉彈簧或彈簧-質量懸吊系統等)之自然頻率及振態，大多以正解求之，但其所探討的問題，均為在樑上的固定位置，附帶單一的各類集中元素，而且所得的頻率方程式非常複雜。對於均勻的 Euler 樑，於任意位置附帶任意個數及任意大小之集中質量、線性彈簧和簡支撐跨距的自然頻率及振態的正解之獲得，以現有方法求之則有其困難之處，因此本文提出一種「數值組合法」來克服此一困難。此法之優點在於不但可克服附帶二個(含)以上之集中質量、線性彈簧和簡支撐跨距時，數學展開顯示式過於冗長之困難，而獲得「均勻」的 Euler 樑，在任意位置附帶任意個數及任意大小之集中質量、線性彈簧和簡支撐跨距的自然頻率及振態的正解(exact solution)。

對一未附帶有任何集中元素(如：集中質量、集中質量慣性矩、線性彈簧、扭轉彈簧或彈簧-質量懸吊系統等)的「均勻」Euler 樑而言，在各種邊界條件下，其自然頻率的正解已由許多書刊中獲得[1~4]，至於均勻懸臂 Euler 樑之自由端附帶一集中質量，其自然頻率的正解，1974 年才由 Laura 等[5]所提出，隔年他們又將固定端改為彈性支撐端，求得自然頻率的正解[6]。Gü rg ö ze 在 1984 年求得一根樑及桿子上只附帶一個集中質量或一個線性彈簧之自然頻率的正解[7]；在 1986 年求得同一懸臂樑於自由端處分別附帶一集中質量及一線性彈簧的近似解[8]；在 1996 年求得同一根樑及桿子上同時附帶一個集中質量和一個線性彈簧之自然頻率的正解[9]。1988 年 Liu 等[10]提出一均勻簡支-簡支的 Euler 樑之兩端各附帶一扭轉彈簧，且於樑上附帶一集中質量之自然頻率的正解。1991 年 Hamdan 和 Jubran [11]利用解析法，來探討兩端分別用一

個線性彈簧和一個扭轉彈簧支撐，而在樑中任意位置附帶一個集中質量的 Euler 樑之自由振動及強迫振動反應。1990 年 Wu 及 Lin [12]曾使用解析與數值混合法，對一在任意位置附帶任意個數及任意大小之集中質量的 Euler 樑進行自由振動分析。1998 年 Wu 和 Chou [13]利用同方法，對一附帶任意個數之各類集中元素的 Euler 樑進行自由振動分析。1999 年 Wu 和 Chou [14]利用數值組合法，來求一附帶任意個數之彈簧-質量懸吊系統之 Euler 樑的自然頻率及振態之正解。直至 1995 年 Gü rg ö ze 等 [15]才對一均勻懸臂樑附帶單一簡支撐跨距並於自由端附帶單一個集中質量之自然頻率正解之探討。但探討一均勻 Euler 樑在任意位置附帶任意個數及任意大小之集中質、線性彈簧與簡支撐跨距的自然頻率及振態之正解的文獻則尚未有所見，此亦為本文研究之動機緣由。

## 二、拘束均勻樑之特徵函數

圖 1 表示一均勻懸臂尤拉(Euler)樑附帶  $n$  個集中質量與附帶  $n$  個簡支撐跨距(換言之附帶  $n$  個極大值的線性彈簧)。整個懸臂樑被位於  $x = x_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) 之附著點(attach point)  $v$  分成  $(n+1)$  個部份。其中，在小圓  $(v)$  中之  $v$  表示第  $v$  個附著點，在括弧  $(v)$  中之  $v$  表示第  $v$  個片段(segment)。此外，此外，樑之左、右兩端分別以 L、R 表示。

若不考慮剪切效應和轉動慣性矩時，則未受拘束之均勻尤拉樑之運動方程式為

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

其中  $y$  表樑之橫向位移(transverse deflection)， $E$  表楊氏模數(Young's modulus)， $A$  表樑之剖面積(the cross-sectional area)， $I$  表樑剖面積之慣性矩(moment of inertia of cross-sectional area  $A$ )， $\rho$  表樑之質量密度(mass density of the beam material)， $x$  表延樑中心軸的空間座標(spatial coordinate along the beam axis)和  $t$  表時間。

當尤拉樑做諧和的自由振動時，樑之瞬時橫向位移，可以下列形式表示

$$y(x,t) = \bar{Y}(\xi)e^{i\bar{\omega}t} \quad (2)$$

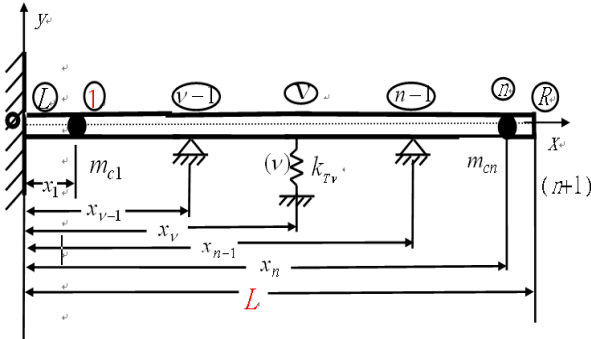


圖 1. 一均勻懸臂樑附帶  $n$  個集中質量、線性彈簧與附帶  $n$  個簡支撐跨距

其中  $\bar{\omega}$  表受拘束尤拉樑之自然頻率， $\xi = x/L$  表與樑長度有關之無因次化座標， $\bar{Y}(\xi)$  代表  $y(x,t)$  之振幅，然後將(2)式代入(1)式，可得

$$\bar{Y}'''' - \Omega^4 \bar{Y} = 0 \quad (3)$$

其中

$$\Omega^4 = m\bar{\omega}^2/EI \text{ 或 } \bar{\omega}^2 = (\Omega L)^4 \left(\frac{EI}{mL^4}\right) \quad (4)$$

由(3)式可知，其解之形式為

$$\bar{Y}(\xi) = C_1 \sin(\Omega L \xi) + C_2 \cos(\Omega L \xi) + C_3 \sinh(\Omega L \xi) + C_4 \cosh(\Omega L \xi) \quad (5)$$

其中  $C_i$  ( $i = 1 \sim 4$ ) 表積分常數

(5)式表示受拘束尤拉樑之橫向位移的特徵函數。同時這拘束樑之自然頻率  $\bar{\omega}_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) 和每一附著點之積分常數， $C_i$  ( $i = 1 \sim 4$ )，將在下面幾節中分別決定，並可同時求得受拘束尤拉樑之自然頻率  $\bar{\omega}_j$  及其對應之振態  $\bar{Y}_j(\xi)$  值。

對“第  $\nu$  個樑片段”而言，吾人可重寫(5)式為

$$\bar{Y}_\nu(\xi_\nu) = C_{\nu 1} \sin(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 2} \cos(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 3} \sinh(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 4} \cosh(\Omega L \xi_\nu) \quad (6)$$

將(6)式對  $\xi_\nu$  做微分可得

$$\bar{Y}'_\nu(\xi_\nu) = \Omega L C_{\nu 1} \cos(\Omega L \xi_\nu) - \Omega L C_{\nu 2} \sin(\Omega L \xi_\nu) + \Omega L C_{\nu 3} \cosh(\Omega L \xi_\nu) + \Omega L C_{\nu 4} \sinh(\Omega L \xi_\nu) \quad (7)$$

$$Y''_\nu(\xi_\nu) = -(\Omega L)^2 C_{\nu 1} \sin(\Omega L \xi_\nu) - (\Omega L)^2 C_{\nu 2} \cos(\Omega L \xi_\nu) + (\Omega L)^2 C_{\nu 3} \sinh(\Omega L \xi_\nu) + (\Omega L)^2 C_{\nu 4} \cosh(\Omega L \xi_\nu) \quad (8)$$

$$Y'''_\nu(\xi_\nu) = -(\Omega L)^3 C_{\nu 1} \cos(\Omega L \xi_\nu) + (\Omega L)^3 C_{\nu 2} \sin(\Omega L \xi_\nu) + (\Omega L)^3 C_{\nu 3} \cosh(\Omega L \xi_\nu) + (\Omega L)^3 C_{\nu 4} \sinh(\Omega L \xi_\nu) \quad (9)$$

### 三、拘束均勻尤拉樑在第 $\nu$ 個附著點之矩陣係數 $[B_\nu]$

若在有拘束均勻樑之第  $\nu$  個附著點(即  $x = x_\nu$  處)，附帶有一集中質量  $m_{c\nu}$  及一線性彈簧  $k_{T\nu}$ ，則根據撓曲與斜率相容性 (compatibility)，以及彎矩與剪力平衡 (equilibrium) 之條件，可得

$$\bar{Y}_\nu^L(\xi_\nu) = \bar{Y}_\nu^R(\xi_\nu) \quad (10a)$$

$$\bar{Y}'_\nu^L(\xi_\nu) = \bar{Y}'_\nu^R(\xi_\nu) \quad (10b)$$

$$\bar{Y}_\nu^{nL}(\xi_\nu) = \bar{Y}_\nu^{nR}(\xi_\nu) \quad (10c)$$

$$\bar{Y}_\nu^{mL}(\xi_\nu) + [m_{c\nu}^*(\Omega L)^4 - k_{T\nu}^*] \bar{Y}_\nu^L(\xi_\nu) = \bar{Y}_\nu^{mR}(\xi_\nu) \quad (10d)$$

$$C_{\nu 1} \sin(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 2} \cos(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 3} \sinh(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 4} \cosh(\Omega L \xi_\nu) = 0 \quad (11a)$$

$$\Omega L C_{\nu 1} \cos(\Omega L \xi_\nu) - \Omega L C_{\nu 2} \sin(\Omega L \xi_\nu) + \Omega L C_{\nu 3} \cosh(\Omega L \xi_\nu) + \Omega L C_{\nu 4} \sinh(\Omega L \xi_\nu) - \Omega L C_{\nu 1+} \cos(\Omega L \xi_\nu) + \Omega L C_{\nu 2+} \sin(\Omega L \xi_\nu) - \Omega L C_{\nu 3+} \cosh(\Omega L \xi_\nu) - \Omega L C_{\nu 4+} \sinh(\Omega L \xi_\nu) = 0 \quad (11b)$$

$$(\Omega L)^2 [-C_{\nu 1} \sin(\Omega L \xi_\nu) - C_{\nu 2} \cos(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 3} \sinh(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 4} \cosh(\Omega L \xi_\nu)] - (\Omega L)^2 [-C_{\nu 1+} \sin(\Omega L \xi_\nu) - C_{\nu 2+} \cos(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 3+} \sinh(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 4+} \cosh(\Omega L \xi_\nu)] = 0 \quad (11c)$$

$$(\Omega L)^3 [-C_{\nu 1} \cos(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 2} \sin(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 3} \cosh(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 4} \sinh(\Omega L \xi_\nu)] + (m_{c\nu}^*(\Omega L)^4 - k_{T\nu}^*) [-C_{\nu 1} \cos(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 2} \sin(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 3} \cosh(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 4} \sinh(\Omega L \xi_\nu)] - (\Omega L)^3 [-C_{\nu 1+} \cos(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 2+} \sin(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 3+} \cosh(\Omega L \xi_\nu) + C_{\nu 4+} \sinh(\Omega L \xi_\nu)] = 0 \quad (11d)$$

其中

$$\xi_\nu = x_\nu/L \quad (12)$$

$$m_{c\nu}^* = m_{c\nu}/m_b \quad (12)$$

$$k_{T\nu}^* = k_{T\nu}/(EI/L^3) \quad (13)$$

(12)式中之  $m_b$  表樑之總質量， $m_{c\nu}$  表第  $\nu$  個集中質量之大小，(13)式中之  $k_{T\nu}$  表第  $\nu$  個線性彈簧常數大小。

因在(10)式中，在第  $\nu$  個集中元素之附著點  $\xi = \xi_\nu$  (或  $x = x_\nu$ ) 處的“左邊”是屬於段樑  $\nu$ ，而其“右邊”是屬於段樑  $\nu + 1$ ，故其相關聯的積分

常數分別以  $C_{vi}$  及  $C_{v+1,i}$  ( $i = 1\sim 4$ ) 表之，如 (11a)~(11d) 式所示。

將 (11a)~(11d) 式寫成矩陣之形式 (matrix form)，得

$$[B_v]\{C_v\} = 0 \quad (14)$$

#### 四、均勻樑左端之係數矩陣 $[B_L]$

若懸臂樑之左端為夾住 (clamped)，則其邊界條件為

$$\bar{Y}(0) = 0, \quad \bar{Y}'(0) = 0 \quad (15a), (15b)$$

從圖 1 吾人可見樑的左端 ( $L$ ) 與第一個段樑 ( $v=1$ ) 的左端重合，故將 (6) 及 (7) 式代入 (15a) 及 (15b) 式，得

$$C_{12} + C_{14} = 0 \quad (16a)$$

$$\Omega L C_{11} + \Omega L C_{13} = 0 \quad (16b)$$

將 (16a) 及 (16b) 式寫成矩陣形式，得

$$[B_L]\{C_L\} = 0 \quad (17)$$

其中

$$[B_L] = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\{C_L\} = \{C_{11} \ C_{12} \ C_{13} \ C_{14}\} = \{\bar{C}_1 \ \bar{C}_2 \ \bar{C}_3 \ \bar{C}_4\}$$

上列式中之符號 [ ] 及 { } 分別代表長方形矩陣及行向量，而  $\bar{C}_1 = C_{11}$ ， $\bar{C}_2 = C_{12}$ ， $\bar{C}_3 = C_{13}$ ， $\bar{C}_4 = C_{14}$  在 (18) 式及後續的方程式中，位於長方形矩陣上邊 (top side) 及右邊 (right side) 的數目字相當於與  $\bar{C}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 相關聯的自由度之辨識碼 (identification numbers)。

#### 五、均勻樑右端之係數矩陣 $[B_R]$

若懸臂樑之右端為自由端 (free end)，則其邊界條件為

$$\bar{Y}''(l) = 0, \quad \bar{Y}'''(l) = 0 \quad (19a), (19b)$$

由圖 1 吾人可見樑的右端  $R$  與第  $(n+1)$  個段樑 ( $v = n+1$ ) 的右端重合，故將 (2-8) 及 (2-9) 式代入 (19a) 及 (19b) 式，得

$$-C_{n+1,1} \sin(\Omega L) - C_{n+1,2} \cos(\Omega L) + C_{n+1,3} \sinh(\Omega L) + C_{n+1,4} \cosh(\Omega L) = 0 \quad (20a)$$

$$-C_{n+1,1} \cos(\Omega L) + C_{n+1,2} \sin(\Omega L) + C_{n+1,3} \cosh(\Omega L) + C_{n+1,4} \sinh(\Omega L) = 0 \quad (20b)$$

將 (20a) 及 (20b) 式寫成矩陣形式，得

$$[B_R]\{C_R\} = 0 \quad (21)$$

其中

$$[B_R] = \begin{bmatrix} & 4n+1 & 4n+2 & 4n+3 & 4n+4 \\ -\sin \Omega L & -\cos \Omega L & \sinh \Omega L & \cosh \Omega L \\ -\cos \Omega L & \sin \Omega L & \cosh \Omega L & \sinh \Omega L \end{bmatrix}_{p-1}^p \quad (22a)$$

$$\{C_R\} = \{C_{n+1,1} \ C_{n+1,2} \ C_{n+1,3} \ C_{n+1,4}\} \\ = \{\bar{C}_{4n+1} \ \bar{C}_{4n+2} \ \bar{C}_{4n+3} \ \bar{C}_{4n+4}\}$$

$$\bar{C}_{4n+1} = C_{n+1,1}, \quad \bar{C}_{4n+2} = C_{n+1,2}, \quad \bar{C}_{4n+3} = C_{n+1,3}, \\ \bar{C}_{4n+4} = C_{n+1,4} \quad (22b)$$

$$p = 4n+4 \quad (23)$$

(23) 式中之  $p$  代表方程式之總數。由以上的推導，吾人可見對一附帶各類集中元素的樑而言，由每一附著點吾人皆可得到四個方程式 [包括三個變形相容方程式 (compatibility equations) 及一個力平衡方程式 (force-equilibrium equation)]，且從樑的每一邊界 ( $L$  或  $R$ )，吾人皆可得到二個方程式。因此，對一附帶  $n$  個各類集中元素的樑而言，吾人可得到的積分常數  $C_{vi}$  ( $v=1\sim n, i=1\sim 4$ ) 的方程式之總數為  $4n+4$ ，此即 (23) 式所示之  $p = 4n+4$ 。

由 (6) 式，吾人可見知每一段樑之  $\bar{Y}_v(\xi)$  中含有四個積分常數  $C_{vi}$  ( $i=1\sim 4$ )，因此若一樑附帶  $n$  個各類集中元素，則段樑之總數為  $n+1$ ，且總未知數 ( $C_{vi}$ ) 為  $4(n+1) = 4n+4 = p$ 。

## 六、有拘束均勻樑的整體係數矩陣 $[\bar{B}]$ 及頻率方程式

若將所有的積分常數  $C_{vi}$  ( $v=1\sim n, i=1\sim 4$ ) 以一由係數  $\bar{C}_k$  ( $k=1, 2, \dots, p$ ) 所組成的行向量  $\{\bar{C}\}$  來表示, 則利用傳統的有限元素法之直接勁度矩陣法, 將係數矩陣  $[B_L]$ 、 $[B_V]$  及  $[B_R]$ , 依其自由度之辨識碼[如(14c)、(18)及(22a)式之上邊及右邊的數目計算式所示], 加以組合, 吾人便可得到整個振動系統的積分常數方程式為

$$[\bar{B}]\{\bar{C}\}=0 \quad (24)$$

上式若有非零解(nontrivial solution), 則

$$|\bar{B}|=0 \quad (25)$$

上式即為一頻率方程(frequency equation), 本文利用半間距(half-interval)數值法來求解特徵值  $\bar{\omega}_j$  ( $j=1, 2, \dots$ )。

將每一求得的特徵值  $\bar{\omega}_j$  代入(24)式中, 便可決定積分常數  $\bar{C}_k$  ( $k=1, 2, \dots, p$ ) 之值, 其中  $\bar{C}_{4v-3}=C_{v1}$ ,  $\bar{C}_{4v-2}=C_{v2}$ ,  $\bar{C}_{4v-1}=C_{v3}$ ,  $\bar{C}_{4v}=C_{v4}$  ( $v=1\sim n$ )。因此, 將  $C_{vi}$  ( $i=1\sim 4$ ) 代入(6)式便可求得相對應之振態  $\bar{Y}^{(j)}(\xi)$ 。

## 七、各種支撐條件下的係數矩陣

$$[B_L] \text{ 及 } [B_R]$$

由上一節可見樑中每一個集中元素的附著點之係數矩陣  $[B_V]$  與樑之邊界條件(boundary condition)無關, 僅邊界係數矩陣(boundary matrix)  $[B_L]$  及  $[B_R]$  (見(18)及(22c)式) 會因樑的邊界條件不同而有所差異, 故必須依據不同的邊界條件加以修正後, 再按照以上所提的步驟加以組合, 求解各種不同邊界條件下有拘束均勻樑之自然頻率與振態。各種不同邊界條件下的係數矩陣  $[B_L]$  及  $[B_R]$  為:

(1) 簡支 - 簡支樑 (Simply supported-simply

supported beam)

$$[B_L]=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[B_R]=\begin{matrix} & 4n+1 & 4n+2 & 4n+3 & 4n+4 \\ \begin{matrix} \sin \Omega L & \cos \Omega L & \sinh \Omega L & \cosh \Omega L \\ -\sin \Omega L & -\cos \Omega L & \sinh \Omega L & \cosh \Omega L \end{matrix} & \begin{matrix} p-1 \\ p \end{matrix} \end{matrix} \quad (26)$$

(2) 夾住-夾住樑(Clamped-clamped beam)

$$[B_L]=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[B_R]=\begin{matrix} & 4n+1 & 4n+2 & 4n+3 & 4n+4 \\ \begin{matrix} \sin \Omega L & \cos \Omega L & \sinh \Omega L & \cosh \Omega L \\ \cos \Omega L & -\sin \Omega L & \cosh \Omega L & \sinh \Omega L \end{matrix} & \begin{matrix} p-1 \\ p \end{matrix} \end{matrix} \quad (27)$$

(3) 夾住 - 簡支樑 (Clamped-simply supported beam)

$$[B_L]=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[B_R]=\begin{matrix} & 4n+1 & 4n+2 & 4n+3 & 4n+4 \\ \begin{matrix} \sin \Omega L & \cos \Omega L & \sinh \Omega L & \cosh \Omega L \\ -\sin \Omega L & -\cos \Omega L & \sinh \Omega L & \cosh \Omega L \end{matrix} & \begin{matrix} p-1 \\ p \end{matrix} \end{matrix} \quad (28)$$

此外, 為了方便起見, 吾人將樑之各種不同之邊界條件, 用兩個字的字首 CF、SS、CC 及 CS 分別代表夾住-自由樑(Clamped-free)、簡支 - 簡支樑 (Simply supported-simply supported)、夾住-夾住樑(Clamped-clamped) 及夾住-簡支樑(Clamped-simply supported)。若附帶一個簡支撐跨距時, 則以 CSF、SSS、CSC 及 CSS 分別代表夾住-簡支跨距-自由樑 (Clamped-simply supported span-free)、簡支-簡支跨距-簡支樑 (Simply supported-simply supported span-simply supported)、夾住-簡支跨距 - 夾住樑 (Clamped-simply supported

span-clamped) 及夾住 - 簡支撐跨距 - 簡支撐 (Clamped-simply supported span-simply supported)。若附帶二個簡支撐跨距時，則以 CSSF、SSSS、CSSC 及 CSSS 等符號代表之，依此類推多個簡支撐跨距。

## 八、結果與討論

為了方便起見，吾人引用二個參數： $m_{ci}^* = m_{ci}/m_b$  及  $k_{Ti}^* = k_{Ti}/k_b$ ， $i = 1, 2, \dots$ 。其中  $m_{ci}$  表集中質量， $k_{Ti}$  表簡支撐跨距之線性彈簧常數。

### (a) 驗證

為了驗證本文所提的理論及所設計發展的電算程式之可靠性，本文依現有文獻中，僅有一均勻懸臂樑附帶單一個簡支撐跨距及自由端附帶一個集中質量(如圖 2 所示)、吾人首先以文獻[15]中研究一均勻懸臂樑附帶單一個簡支撐跨距和單一集中質量實例。由表 1 所示一均勻懸臂樑附帶單一個簡支撐跨距(附帶位置分別為  $\xi_1 = x_1/L = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ) 並於自由端附帶單一集中質量其大小分別為 ( $m_{c1}^* = m_{c1}/m_b = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 5.0, 10.0, 5.0, 0.0$ )，所得之前五個最低的特徵值係數  $\Omega_j L$  ( $j = 1 \sim 5$ ) 與文獻[15]所得之第一個最低的特徵值係數  $\Omega_j L$  ( $j = 1 \sim 5$ ) 非常接近。

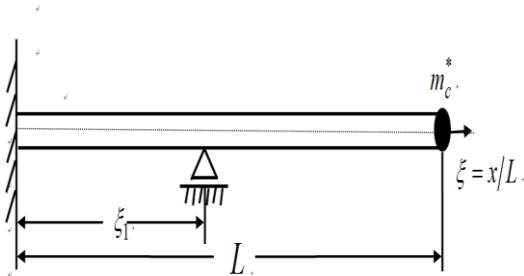


圖 2. 一均勻懸臂樑附帶單一個簡支撐跨距及自由端附帶一個集中質量[15]

### (b) 均勻的 Euler 樑附帶任意個簡支撐跨距及集中質量

為了便於比較，吾人將只附帶一個簡支撐跨距(支撐位於  $\xi_1 = 0.5$ )和二個簡支撐跨距(支撐分別位於  $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$ )未附帶任何集中質量的均勻樑，在四種邊界條件下之前五個最低的自然頻率係數列於表 2、3 中，並將其對應之振態示於圖 3、4 中。

若一切情況維持不變，只是將上述情況多增加附帶一個(附帶位置及大小分別為  $\xi_2 = 0.75$ ； $m_{c1}^* = 0.5$ )及三個集中質量(附帶位置及大小分別為  $\xi_3 = 0.1$ 、 $\xi_4 = 0.5$ 、 $\xi_5 = 0.9$ ； $m_{c1}^* = 0.1$ ， $m_{c2}^* = 0.3$ ， $m_{c3}^* = 0.5$ )，則在六種邊界條件下之前五個自然頻率係數分別如表 4、5 所示，其所對應之振態分別如圖 5、6 所示。由表 4、5 可見，本文所求得之前五個最低的自然頻率係數與 FEM(使用樑元素數為 40 個元素)所求得之前五個最低的自然頻率係數的近似解非常接近。由表 2、4 及 3、5 可見，在四種邊界條件下，附帶簡支撐跨距樑之相關的自然頻率係數皆因附帶集中質量而降低。由圖 3、5 及圖 4、6 可見，其相關之振態在形態上並無太大的差異，僅有附帶集中質量的模態位移比沒有附帶集中質量者略小。一均勻樑附帶單一個簡支撐跨距(位於  $x/L = 0.5$ )及附帶一個線性彈簧(附帶位置及大小分別為  $\xi_2 = 0.75$ ； $k_{T1}^* = 1.0$ )在六種邊界條件下所得之前四個最低自然頻率係數與振態，分別如表 6 與圖 7 所示。一均勻樑附帶二個簡支撐跨距(分別位於  $x/L = 0.3, 0.7$ )及附帶三個線性彈簧(附帶位置及大小分別為  $\xi_3 = 0.1$ 、 $\xi_4 = 0.5$ 、 $\xi_5 = 0.9$ ； $k_{T1}^* = 3.0$ ， $k_{T2}^* = 4.5$ ， $k_{T3}^* = 6.0$ )在四種邊界條件下所得之前五個最低的自然頻率係數，如表 7 所示。

表 1. 一均勻懸臂樑在各種不同簡支撐跨距及不同集中質量參數下所得之自然頻率係數( $\Omega_1 L$ )的比較。

Method	$\xi = x/L$	$m_{c1}^*$								
		0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	5.0	10.0	50.0
NAM	0.1	1.733151	1.573346	1.515774	1.467365	1.389507	1.328690	0.923704	0.780851	0.524437
REF.[15]		1.733152	1.573346	1.515774	1.467365	1.389507	1.328691	0.923703	0.780851	0.524435
NAM	0.3	2.040837	1.837394	1.765990	1.706576	1.612049	1.538970	1.0632280	0.89798	0.602649
REF.[15]		2.040837	1.837394	1.765990	1.706576	1.612049	1.538970	1.0632280	0.89798	0.602648
NAM	0.5	2.522504	2.646767	2.153170	2.076278	1.955525	1.863303	1.278225	1.078480	0.723191
REF.[15]		2.522504	2.246767	2.153170	2.076278	1.955525	1.863303	1.278225	1.078480	0.723191
NAM	0.7	3.392341	2.992090	2.860025	2.752698	2.585984	2.459963	1.677463	1.414151	0.947634
REF.[15]		3.392341	2.992090	2.860025	2.752698	2.585984	2.459963	1.677463	1.414151	0.947634
NAM	0.9	4.244387	4.138772	4.086088	4.034122	3.933707	3.839365	2.881863	2.459104	1.663392
REF.[15]		4.244387	4.138772	4.086088	4.034122	3.933707	3.839365	2.881863	2.459104	1.663392

表 2. 一均勻樑附帶單一個簡支跨距(位於  $x/L = 0.5$ ) 未附帶集中質量在四種邊界條件下所得之前五個最低的自然頻率係數。

Span Location	Boundary Conditions	Methods	Dimensionless frequency parameters				
			$\Omega_1 L$	$\Omega_2 L$	$\Omega_3 L$	$\Omega_4 L$	$\Omega_5 L$
0.5	CSF	NAM	3.14159	7.85327	9.42494	14.13836	15.70998
	SSS	NAM	6.28321	7.85327	12.56704	14.13838	18.85459
	CSC	NAM	7.85327	9.46025	14.13838	15.70846	20.42785
	CSS	NAM	6.78649	8.92677	13.09165	15.18497	19.37889

表 3. 一均勻樑附帶二個簡支跨距(分別位於  $x/L = 0.3$ 、 $0.7$ ) 未附帶集中質量在四種邊界條件下所得之前五個最低的自然頻率係數。

Span Location	Boundary Conditions	Methods	Dimensionless frequency parameters					
			$\Omega_1 L$	$\Omega_2 L$	$\Omega_3 L$	$\Omega_4 L$	$\Omega_5 L$	
0.3	0.7	CSSF	NAM	4.91548	9.70498	13.81416	14.77765	18.09995
		SSSS	NAM	9.03960	11.56566	12.66790	17.53924	21.68044
		CSSC	NAM	9.60935	13.84182	14.82297	18.10991	23.57714
		CSSS	NAM	9.29284	12.06771	14.39785	17.83250	22.06606

表 4. 一均勻樑附帶單一個簡支跨距(位於  $x/L=0.5$ )及附帶一個集中質量(附帶位置及大小分別為  $\xi_2=0.75$  ;  $m_{c1}^*=0.5$ )在六種邊界條件下所得之前五個最低的自然頻率係數。

Span Location $\xi_1$	Boundary Conditions	Methods	Dimensionless frequency parameters				
			$\Omega_1 L$	$\Omega_2 L$	$\Omega_3 L$	$\Omega_4 L$	$\Omega_5 L$
0.5	CSF	NAM	2.78705	6.96589	8.4698	13.99204	15.70693
		FEM	2.78705	6.96592	8.4710	13.99317	15.70896
	SSS	NAM	5.09507	7.30998	12.56637	13.91065	17.20495
		FEM	5.09507	7.31003	12.56704	13.99204	17.20799
	CSC	NAM	6.22929	8.79943	13.96456	15.70639	18.79047
		FEM	6.22930	8.79954	13.96568	15.70846	18.81432
	CSS	NAM	5.23235	8.72998	13.05123	14.90610	17.48651
		FEM	5.23234	8.73009	13.05204	14.90763	17.49067
	SSC	NAM	6.00911	7.46620	12.92367	15.14844	18.53297
		FEM	6.00912	7.46624	12.92444	15.15016	18.54592
	FSC	NAM	3.13134	6.26592	8.74415	13.96410	15.70795
		FEM	3.13134	6.26593	8.74425	13.96521	15.70999

表 5. 一均勻樑附帶二個簡支跨距(分別位於  $x/L=0.3$ 、 $0.7$ )及附帶三個集中質量(附帶位置及大小分別為  $\xi_3=0.1$ 、 $\xi_4=0.5$ 、 $\xi_5=0.9$  ;  $m_{c1}^*=0.1$  ,  $m_{c2}^*=0.3$  ,  $m_{c3}^*=0.5$ )在六種邊界條件下所得之前五個最低的自然頻率係數。

Span Location $\xi_1$ and $\xi_2$	Boundary Conditions	Methods	Dimensionless frequency parameters				
			$\Omega_1 L$	$\Omega_2 L$	$\Omega_3 L$	$\Omega_4 L$	$\Omega_5 L$
0.3 0.7	CSSF	NAM	3.69565	7.70553	12.99911	13.53960	17.48810
		FEM	3.69566	7.70556	12.99970	13.54043	17.496456
	SSSS	NAM	7.11631	8.61476	10.63880	16.93814	20.25827
		FEM	7.11632	8.61479	10.63898	16.94230	19.58468
	CSSC	NAM	7.58969	10.69402	13.08592	17.24553	20.70000
		FEM	7.58971	10.69411	13.08649	17.24992	20.22393
	CSSS	NAM	7.22849	8.68565	13.07882	17.11371	20.27391
		FEM	7.22852	8.68568	13.07940	17.12326	19.88744
	SSSC	NAM	7.43166	10.46804	10.84649	17.05454	20.25827
		FEM	7.43168	10.46818	10.84662	17.05453	19.85836
	FSSC	NAM	4.46536	7.73121	10.69920	13.80439	17.34235
		FEM	4.46537	7.73123	10.69928	13.80563	17.34686

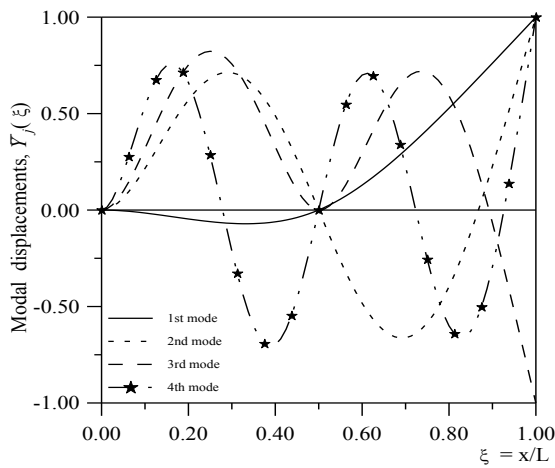


表 6. 一均勻樑附帶單一個簡支跨距(位於  $x/L=0.5$ )及附帶一個線性彈簧(附帶位置及大小分別為  $\xi_2=0.75$  ;  $k_{r1}^*=1.0$ )在六種邊界條件下所得之前五個最低的自然頻率係數。

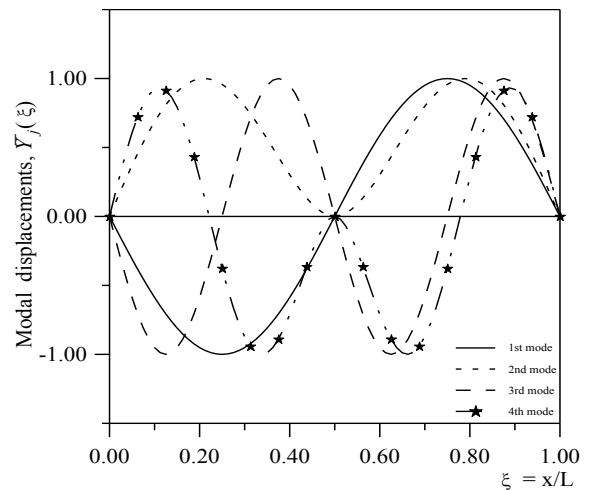
Span Location $\xi_1$	Boundary Conditions	Methods	Dimensionless frequency parameters				
			$\Omega_1 L$	$\Omega_2 L$	$\Omega_3 L$	$\Omega_4 L$	$\Omega_5 L$
0.5	CSF	NAM	3.15124	7.85395	9.42536	15.70795	20.42041
	SSS	NAM	6.28519	7.85428	12.56637	14.13718	18.84936
	CSC	NAM	7.85428	9.46082	14.13719	15.70639	20.42041
	CSS	NAM	6.78921	8.92688	13.09083	15.18325	19.37314
	SSC	NAM	6.78693	8.92801	13.09087	15.18323	19.37315
	FSC	NAM	3.14180	7.85422	9.42556	15.70796	20.42040

表 7. 一均勻樑附帶二個簡支跨距(分別位於  $x/L=0.3$ 、 $0.7$ )及附帶三個線性彈簧(附帶位置及大小分別為  $\xi_3=0.1$ 、 $\xi_4=0.5$ 、 $\xi_5=0.9$  ;  $k_{r1}^*=3.0$  ,  $k_{r2}^*=4.5$  ,  $k_{r3}^*=6.0$ )在四種邊界條件下所得之前五個最低的自然頻率係數。

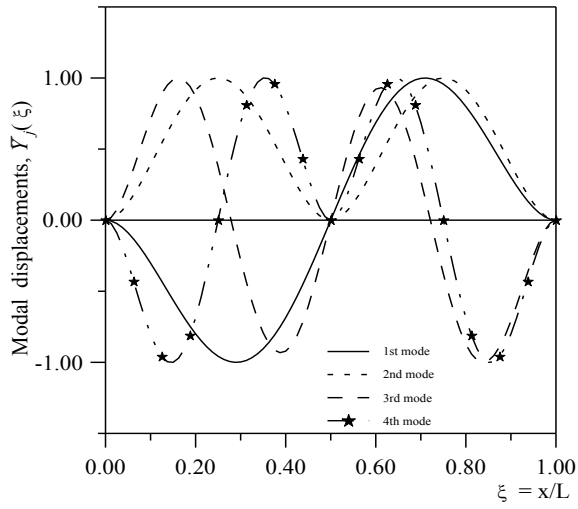
Span Location $\xi_1$ and $\xi_2$	Boundary Conditions	Methods	Dimensionless frequency parameters				
			$\Omega_1 L$	$\Omega_2 L$	$\Omega_3 L$	$\Omega_4 L$	$\Omega_5 L$
0.3 0.7	CSSF	NAM	2.75739	6.27150	10.53210	13.93454	15.72659
	SSSS	NAM	5.15034	9.28407	11.78309	14.28646	18.40537
	CSSC	NAM	6.31129	10.53155	13.93472	15.72697	19.63706
	CSSS	NAM	5.23153	9.48557	13.34456	15.07919	18.595337



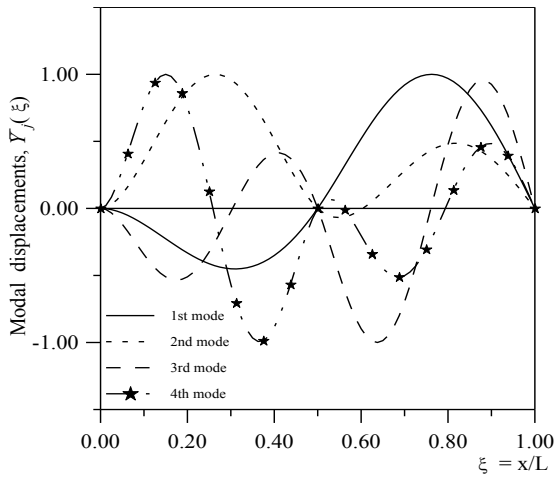
(a)



(b)

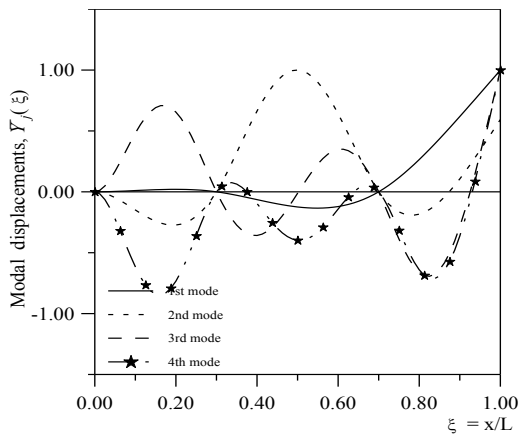


(c)

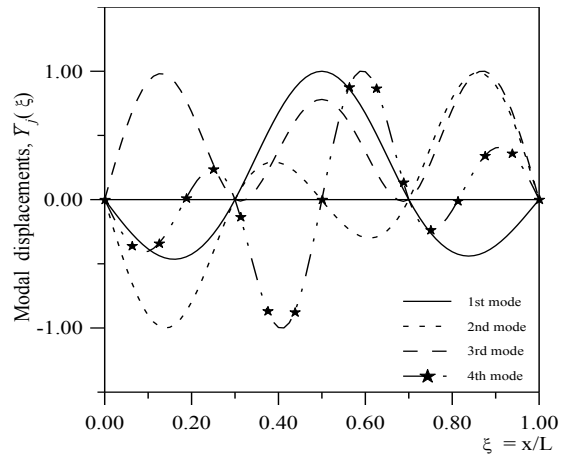


(d)

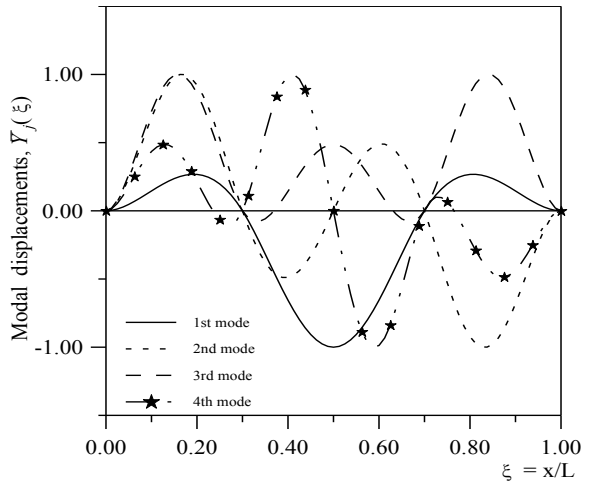
圖 3. 一均勻樑附帶單一個簡支撐跨距(位於  $x/L=0.5$ ) 未附帶集中質量在四種邊界條件下；(a)CSF, (b)SSS, (c)CSC 及 (d)CSS 所得之前四個最低的振態



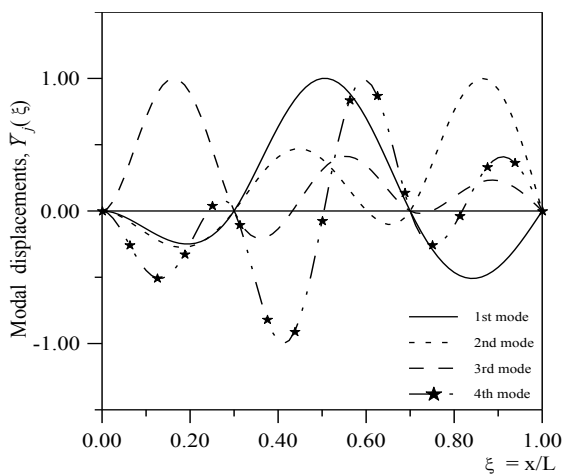
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 4. 一均勻樑附帶二個簡支撐跨距(分別位於  $x/L=0.3$ 、 $0.7$ )未附帶集中質量在四種邊界條件下；(a)CSSF, (b)SSSS, (c)CSSC 及 (d)CSSS 所得之前四個最低的振態

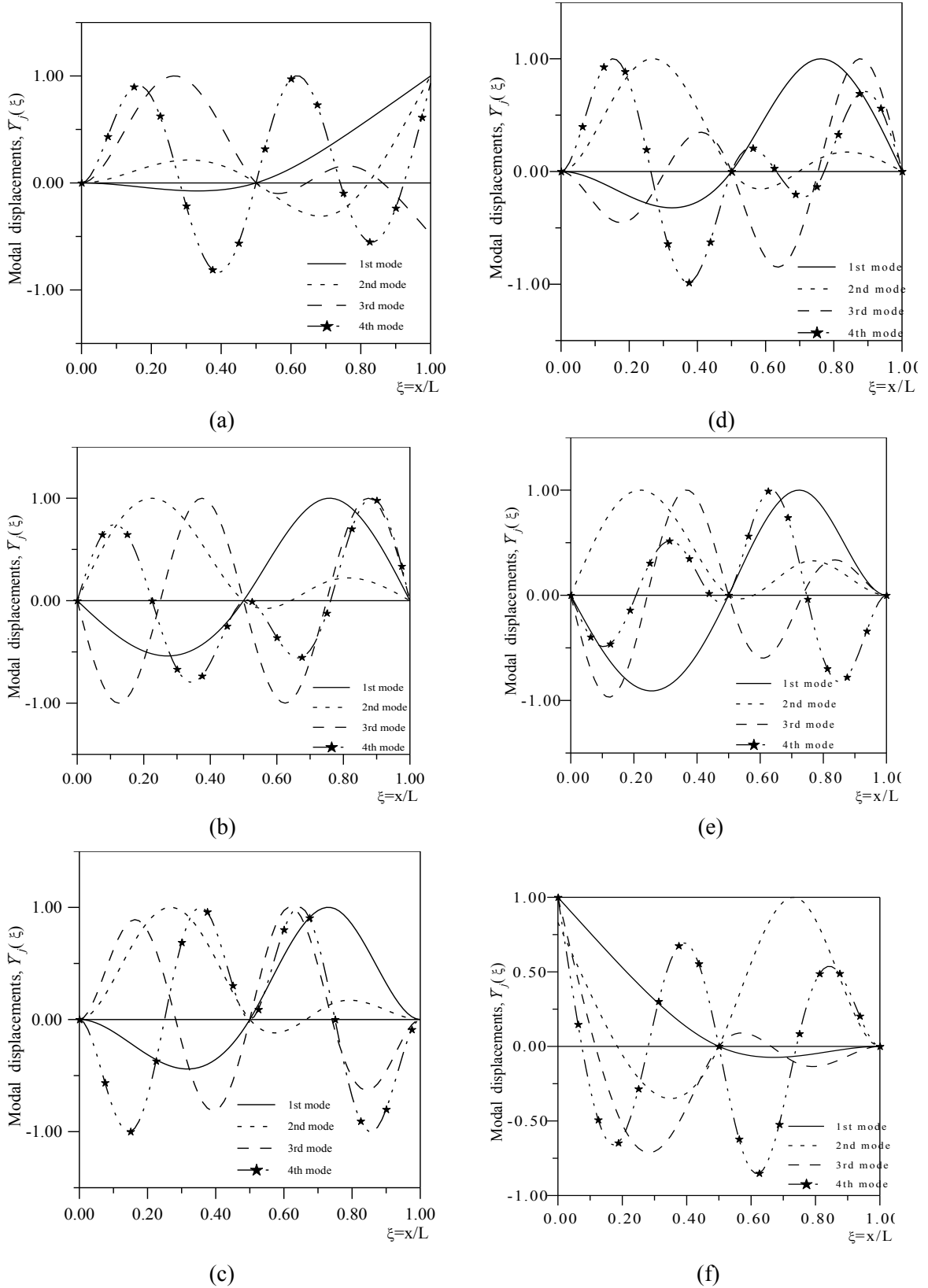


圖 5. 一均勻樑附帶單一個簡支跨距(位於  $x/L=0.5$ )及附帶一個集中質量(附帶位置及大小分別為  $\xi_2 = 0.75$  ;  $m_{c1}^* = 0.5$ )在六種邊界條件下；(a)CSF, (b)SSS, (c)CSC, (d)CSS, (e)SSC 及 (f)FSC 所得之前四個最低的振態

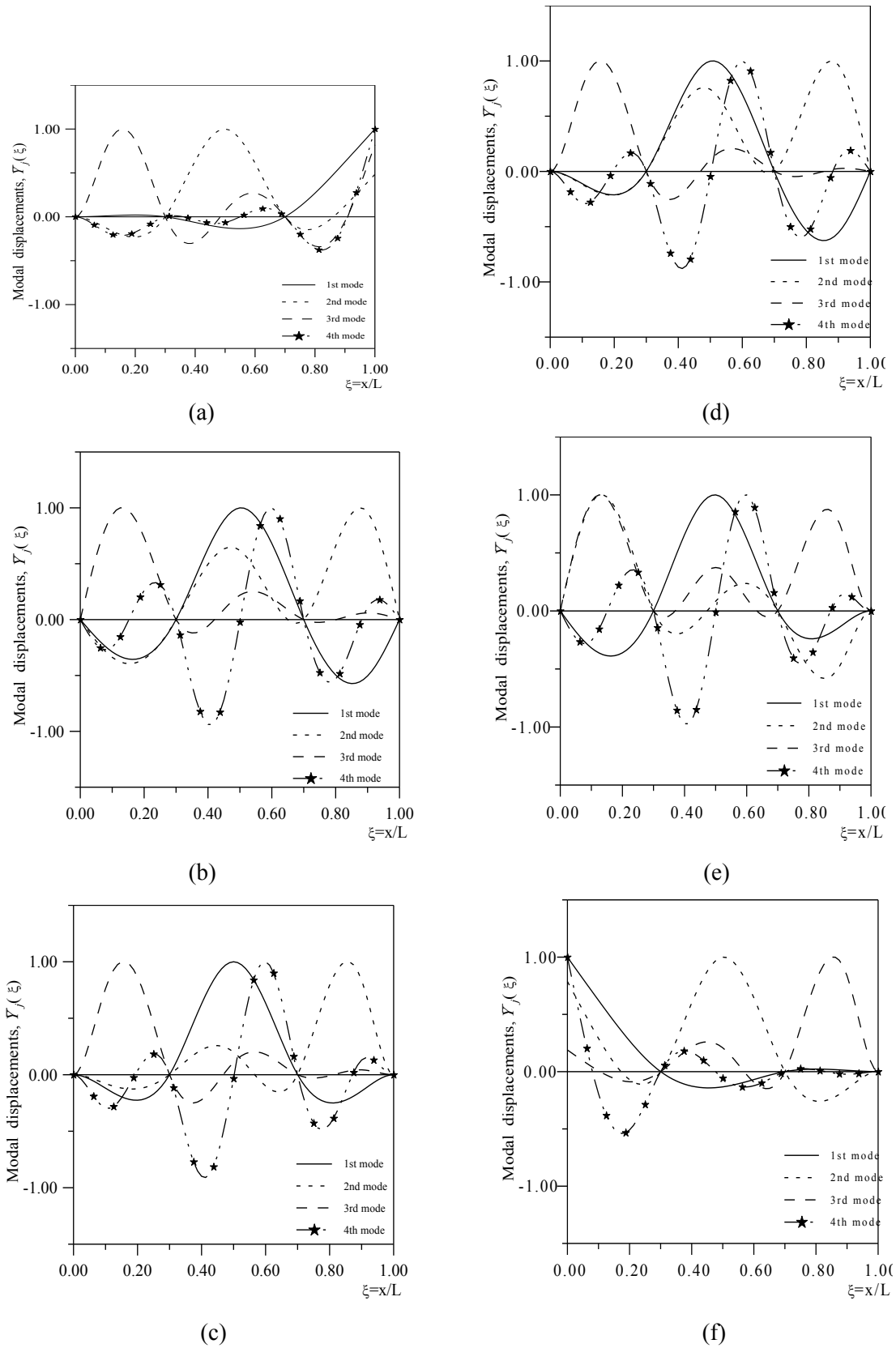


圖 6. 一均勻樑附帶二個簡支跨距(分別位於  $x/L=0.3$ 、 $0.7$ )及附帶三個集中質量(附帶位置及大小分別為  $\xi_3=0.1$ 、 $\xi_4=0.5$ 、 $\xi_5=0.9$ ； $m_{c1}^*=0.1$ ， $m_{c2}^*=0.3$ ， $m_{c3}^*=0.5$ )在六種邊界條件下；(a)CSSF, (b)SSSS, (c)CSSC, (d)CSSS, (e)SSSC 及 (f)FSSC 所得之前四個最低的振態

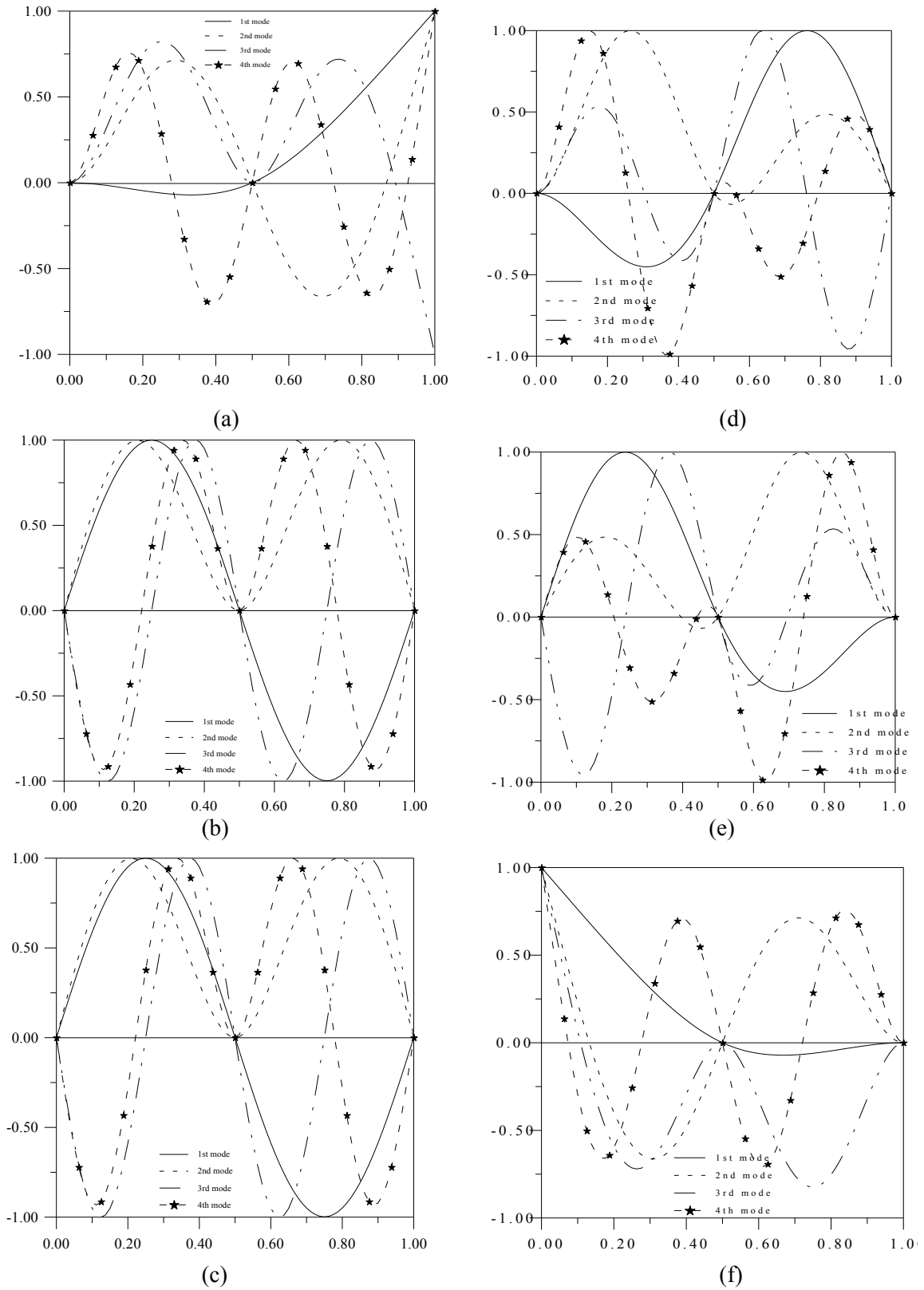


圖 7. 一均勻樑附帶單一個簡支跨距(位於  $x/L=0.5$ )及附帶一個線性彈簧(附帶位置及大小分別為  $\xi_2=0.75$ ;  $k_{T1}^*=1.0$ )在六種邊界條件下:(a)CSF, (b)SSS, (c)CSC, (d)CSS, (e)SSC 及 (f)FSC 所得之前四個最低的振態

## 九、結 論

一均勻 Euler 樑在任意位置附帶多個簡支撐跨距及附帶多個集中質量、線性彈簧時可得下列結論：

1. 在任意邊界條件下的自然頻率係數與振態之正解，使用數值組合法皆可容易求得。
2. 相關的自然頻率係數皆會因附帶集中質量而降低。而其對應之振態在形態上並無太大的差異，附帶集中質量的模態位移比未附帶集中質量者略小。

## 致 謝

本文感謝國防大學理工學院陳德煒教授協助與指導。

## 參考文獻

- [1] Timoshenko, S. P., Young, D. H., and Weaver, W. Jr., Vibration problems in Engineering, 4th Ed., John Wiley & Sons, Inc. 1974.
- [2] Meirovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Company, London, U.K., 1967.
- [3] Clough, R. W. and Penzien, J., Dynamics of Structures, McGraw-Hill, Inc., 1975.
- [4] Tse, Francis S., Morse, Ivan E., and Hinkle, Rolland T., Mechanical Vibration Theory and Applications, Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1978.
- [5] Laura, P. A. A., Pombo, J. L., and Susemihl, E. A., “A note on the vibration of a clamped-free beam with a mass at the free end”, *Journal of Sound and Vibration*, 37(2), 161-168, 1974.
- [6] Laura, P. A. A., Maurizi, M. J., and Pombo, J. L., “A note on the dynamic analysis of an elastically restrained-free beam with a mass at the free end”, *Journal of Sound and Vibration*, 41(4), 397-405, 1975.
- [7] Gurgoze, M., “A Note on the Vibrations of Restrained Beams and Rods with Point Masses”, *Journal of Sound and Vibration*, 96(4), 461-468, 1984.
- [8] Gurgoze, M., “On the approximate determination of the fundamental frequency of a restrained cantilever beam carrying a tip heavy body”, *Journal of Sound and Vibration*, 105, 443-449, 1986.
- [9] Gurgoze, M., “On the eigenfrequencies of a antilever beam with attached tip mass and a pring-mass system”, *Journal of Sound and Vibration*, 190(2), 149-162, 1996.
- [10] Liu, W. H., Wu, J. R., and Huang, C. C., “Free vibration of beams with elastically restrained edges and intermediate concentrated masses”, *Journal of Sound and Vibration*, 122(2), 193-207, 1988.
- [11] Hamdan. M. N. and Jubran, B. A., “Free and Forced Vibrations of a Restrained Uniform Beam Carrying an Intermediate Lumped Mass and a Rotary Inertia”, *Journal of Sound and Vibration*, 150(2), 203-216, 1991.
- [12] Wu, J. S. and Lin, T. L., “Free Vibration Analysis of A Uniform Cantilever Beam with Point Masses by An Analytical-and-Numerical-Combined Method”, *Journal of Sound and Vibration*,

136(2), 201-213, 1990.

- [13] Wu, J. S. and Chou, H. M., “Free Vibration Analysis of A Cantilever Beam Carrying Any Number of Elastically Mounted Point Masses with the Analytical-and-Numerical-Combined Method”, *Journal of Sound and Vibration*, 213(2), 317-332, 1998.
- [14] Wu, J. S. and Chou, H. M., “A New Approach For Determining The Natural Frequencies and Mode Shape of a Uniform Beam Carrying Any Number of Sprung Masses”, *Journal of Sound and Vibration*, 220(3), 451-468, 1999.
- [15] Gurgoze, M., Ozgur, K., and Erol, H. “On the eigenfrequencies of a cantilever beam with a tip mass and in-span support”, *Computers & Structures*, 56(1), 85-92, 1995.

鄭耀輝等

求解附帶任意個集中元素與簡支撐跨距的均勻樑之自然頻率及振態的正解