

## 反戰術性彈道飛彈攔截預估法則之研究

段伴虬 鄧世剛 王懷民 陳聰堅 侯慶達

國防大學中正理工學院兵器工程學系

### 摘要

即時彈道預估為反戰術性彈道飛彈系統之關鍵技術之一，而快速與精度，又為其中之重要需求；有了良好的即時彈道預估工具，方能建構與發展精確之攔截解算法則，以期減少反飛彈系統之負荷，增加成功攔截之公算。本文應用擴展型卡爾曼濾波器結合輸入估測法之適應性卡爾曼濾波器發展反戰術性彈道飛彈之攔截預估法則與 $\alpha$ - $\beta$ 濾波器及擴展型卡爾曼濾波器二種估測工具進行比較，藉由二種模擬彈道進行分析比較，由模擬結果發現，適應性卡爾曼濾波器有較佳之精度，可滿足反飛彈系統之需求，期能有助於反飛彈系統之發展。

**關鍵字:** 擴展型卡爾曼濾波器，輸入估測法，適應性卡爾曼濾波器， $\alpha$ - $\beta$ 濾波器

## A Study of Algorithms for Anti-Tactical Ballistic Missile Intercept Point Prediction

Pan-Chio Tuan, Shi-Gan, Deng, Huai-Min Wang, Tsung-Chien Chen  
and Ching-Ta Hou,

Department of System Engineering  
Chung Cheng Institute of Technology  
National Defense University

### ABSTRACT

Accurate intercept point prediction is heavily needed for an anti-tactical ballistic missile system in order to increase the single shot kill probability. It leads to the requirement of the fast and accurate on-line trajectory prediction for a reentry vehicle. The adaptive Kalman filter, which combined the Extended Kalman filter and input estimation algorithm is proposed in this paper. The comparison of the proposed method to simple Extended Kalman filter and  $\alpha$ - $\beta$  filter by a simplified air defense missile model is used for intercept point prediction. The simulation result, show that the algorithm based on adaptive Kalman filter is superior and worthy of further applications.

**Keywords :** Extended Kalman Filter, Input Estimation, Adaptive Kalman Filter,  $\alpha$ - $\beta$  Filter

## 一、前言

一般防空飛彈系統所面對之空中目標，速度均遠較防空飛彈為低，因此在攔截上，均以追擊方式進行，然而對戰術性彈道飛彈(Tactical Ballistic Missile, TBM)時，此項優勢已不復見，除增加防空飛彈之速度一途外，另研議以逆反式彈道進行攔截，或有成功之機會，所謂逆反式彈道，係防空飛彈沿著彈道飛彈之彈道，逆向而行，形成迎擊。為達於此，首先須能即時與精確地預估彈道飛彈之彈道，繼之運用防空飛彈之飛行特性與彈道，以獲得對彈道飛彈之預估攔截點，並決定防空飛彈之發射時機，此即構成反戰術性彈道飛彈(Anti-Tactical Ballistic Missile, ATBM)之攔截預估法則，此預估法則為反飛彈防空系統之重要關鍵技術之一。

在彈道預估方面，卡爾曼濾波器(Kalman Filter) [1]及擴展型卡爾曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)[2]，可處理包含雜訊(Noise)之量測值與遞迴式估算線性與非線性目標運動狀態之能力，現已廣泛應用在飛行器導航、聲納定位、工業自動化等方面。在真實系統中，因有模式誤差(Model Error)存在，而使得卡爾曼濾波器之誤差遽增，此模式誤差之成因，包括有目標之側向操縱運動、運動方程式內之參數變異(Uncertainty)、數學建模時之各項假設、不確定外力影響、產品瑕疵等，均無法事先預估或彌補。針對目標之操縱性，Chang等首先提出對具操縱性重返載具(Maneuvering Reentry Vehicle)彈道之即時估測[3]，係將重返載具之位置、速度及足以代表操縱性之側向加速度參數，組合為擴增狀態變數(Augmented State)，再以擴展型卡爾曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)估測各狀態，因而獲得重返載具之彈道，其對參數之變化甚為敏感，無法應用於真實系統中。近年來，輸入估測技術發展甚為完備，若能將模式誤差視為系統之輸入，一如重返載具之側向加速度，利用輸入估測技術加以估測，有助於對模式誤差之消弭，輸入估測主要是利用假設無輸入之卡爾曼濾波器之估算值與量測值間之誤差更新(Residual)序列，將未知之輸入物理量估算出來，再加入濾波器中校正濾波器之狀態估測。輸入估測首先由Chan等[4][5]，於1979年針對

解決瞬間變化目標追蹤問題提出，其後Bogler [6]與Meng [7]則加以改進，均應用於瞬間變化目標追蹤問題方面。前述輸入估測係採整批式(Batch Form)之最小平方法(Generalized Least Square Method) [8]，估算未知之加速度輸入項，以供目標作閃躲動作之偵測及校正濾波器之狀態。

基於以上各種方法之優缺點，Tuan等於1996年提出線上即時輸入估測法則[9]對戰術性運動之目標作即時估測，本法由無輸入項之卡爾曼濾波器著手建立遞迴方程式(Regression Equation)，以遞迴式最小平方法(Recursive Least Square, RLS) [10]估測輸入項，並經檢定法則檢測，而後再授入卡爾曼濾波器中，以校正濾波器狀態估測值，可增進實際濾波器之精度，本法定義為適應性卡爾曼濾波器(Adaptive Kalman Filter, AKF)。Lee及Liu結合線上即時輸入估測法則(Input Estimation, IE)與擴展型卡爾曼濾波器，建立戰術性彈道飛彈即時估測彈道之方法[11]，Tuan等將之運用於反戰術性彈道飛彈攔截預估[12]，均獲得比卡爾曼濾波器較優及穩定之結果，另一簡化計算步驟之遞迴式預估法則為 $\alpha$ - $\beta$ 濾波器( $\alpha$ - $\beta$  Filter,  $\alpha\beta F$ ) [13]，也常用於目標追蹤等問題上， $\alpha$ - $\beta$ 濾波器與卡爾曼濾波器不同之處，即在於將狀態增益(Gain)簡化為一常數，節省了繁複的計算步驟，對極為計較計算時間之反戰術性彈道飛彈即時估測彈道問題，亦具相當之吸引力。

本文主要目的在於建立用於反戰術性彈道飛彈之攔截預估法則，分別使用擴展型卡爾曼濾波器、適應性卡爾曼濾波器、及 $\alpha$ - $\beta$ 濾波器等三種估測工具。攔截預估法則之程序，主要分為三部份：首先為估測彈道飛彈之彈道，繼之為預估其彈道，最後為攔截解算。首先須建立戰術性彈道飛彈之運動模式；而後利用雷達量測值與狀態估測法，即時估測出彈道飛彈之彈道；進而利用彈道之估值，依其運動模式預估以後諸時間點之彈道；繼之解算預估彈道與反飛彈彈道之交點，以求得攔截精度與反戰術性彈道飛彈發射時間之預估攔截點諸元，再進行模擬彈道之分析比較，研究三者之差異，建立較佳之反戰術性彈道飛彈攔截預估法則。

## 二、戰術性彈道飛彈運動方程式

考慮戰術性彈道飛彈，相對於雷達之幾何關係如圖1.所示：

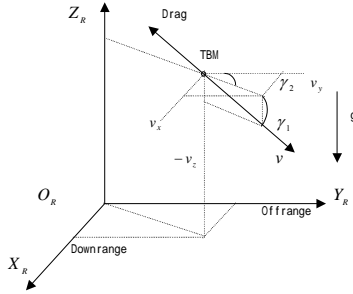


圖1. TBM相對於雷達之幾何關係圖。

假設重返進入大氣層後之條件如下：

- (1) 地表為一平面。
- (2) 地球為靜止不動。
- (3) 地球之重力加速度為一常數。
- (4) 彈道飛彈為一質點。
- (5) 彈道飛彈質量為一常數。

則戰術性彈道飛彈在僅受空氣阻力及重力之情形下，運動方程式為[12]

$$\dot{v}_x = -\frac{\rho v^2}{2\beta} g \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \quad (1)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{\rho v^2}{2\beta} g \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \quad (2)$$

$$\dot{v}_z = \frac{\rho v^2}{2\beta} g \sin \gamma_1 - g \quad (3)$$

其中

$v_x, v_y, v_z$ ：於  $X_R, Y_R, Z_R$  三軸向之速度

$\rho$ ：大氣密度(Air Density)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$g$ ：地球之重力加速度

$$\gamma_1 = \arctan\left(-\frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right)$$

$$\gamma_2 = \arctan\left(\frac{v_x}{v_y}\right)$$

$$\beta : \text{彈道係數} = \frac{W}{S_{ref} C_{D0}}$$

$W$ ：彈道飛彈之重量

$S_{ref}$ ：彈道飛彈之參考面積

$C_{D0}$ ：彈道飛彈之零升力阻力係數

## 三、戰術性彈道飛彈彈道預估法則

面對戰術性彈道飛彈，地面雷達為僅有之量測工具，但量測值均含有隨機量測誤差，為求快速與精準的掌握 TBM 之狀態，須發展 TBM 狀態估測方法，以降低雷達量測誤差，並據以預估彈道。本文將介紹擴展型卡爾曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)、適應性卡爾曼濾波器(Adaptive Kalman Filter, AKF)及 $\alpha$ - $\beta$ 濾波器( $\alpha\beta$ F)三種狀態估測法則，比較其運用於彈道預估上之情形。

### 3.1 狀態方程式

將系統之運動方程式(1~3式)化為狀態方程式形式，令TBM之狀態向量為：

$$X = \begin{bmatrix} x & y & z & v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

則運動狀態方程式表示為非線性狀態方程式：

$$\dot{X} = F(X, t) \quad (5)$$

其中

$$F(X, t) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -\frac{\rho}{2\beta}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)g \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \\ -\frac{\rho}{2\beta}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)g \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \\ \frac{\rho}{2\beta}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)g \sin \gamma_1 - g \end{bmatrix} \quad (6)$$

### 3.2 擴展型卡爾曼濾波器(EKF)

非線性系統，可直接應用EKF法則，將非線性狀態方程式線性化及離散化得

$$X_{n+1} = \phi_n \cdot X_n \quad (7)$$

其中

$$\phi_n = I + \left. \frac{\partial F(X, t)}{\partial X} \right|_{X=X_n} \cdot \Delta t \quad (8)$$

由於飛彈之位置與速度均可由雷達量測，則量測方程式可表為

$$Z_n = HX_n \quad (9)$$

其中  $H$  為  $6 \times 6$  之單位矩陣。

飛彈運動過程中，可能有外力造成擾動，視為雜訊滲入，雷達量測亦有雜訊，因此考慮帶有雜訊之動態方程式如下：

$$X_{n+1} = \phi_n X_n + w_n \quad (10)$$

$$Z_n = HX_n + v_n \quad (11)$$

其中  $w_n$  與  $v_n$  分別為於  $t = n\Delta t$  時之程序雜訊及量測雜訊，並假設

$$E[w_n] = E[v_n] = 0$$

$$\text{Cov}[w_i, w_j] = Q\delta_{ij}$$

$$\text{Cov}[v_i, v_j] = R\delta_{ij}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

由  $t = n\Delta t$  至  $t = (n+1)\Delta t$  之EKF應用得[14]

$$\bar{X}_{n+1/n} = \phi_n \bar{X}_{n/n} \quad (12)$$

$$\bar{X}_{n+1/n+1} = \bar{X}_{n+1/n} + \bar{K}_{n+1}(Z_{n+1} - H\bar{X}_{n+1/n}) \quad (13)$$

其中

$$\bar{K}_{n+1} = \bar{P}_{n+1/n} H^T (H\bar{P}_{n+1/n} H^T + R^{-1}) \quad (14)$$

$$\bar{P}_{n+1/n} = \phi_n \bar{P}_{n/n} \phi_n^T + \Gamma Q \Gamma \quad (15)$$

$$\bar{P}_{n+1/n+1} = (I_{6 \times 6} - \bar{K}_{n+1} H) \bar{P}_{n+1/n} \quad (16)$$

$$\Gamma = I_{6 \times 6} \Delta t \quad (17)$$

### 3.3 適應性卡爾曼濾波器(AKF)

利用無輸入項之擴展型卡爾曼濾波器之估測值與量測值間之誤差，以遞迴式最小平方法，將未知之模式誤差估算出來，並經檢定法

則檢測，再回授到濾波器中校正狀態估測值，稱為適應性卡爾曼濾波器。

模式誤差為用於估測之數學模式與實際運動模式之差，此一誤差，若將之合併為一輸入項，則運動方程式可改寫為

$$\dot{X} = F(X, t) + \Psi U + I_{6 \times 6} \zeta \quad (18)$$

$$Z = HX + \xi \quad (19)$$

若能以適當方式求取  $U$ ，則可改善與修正EKF，降低因模式誤差所產生之誤差。

為求簡便，令

$$M_{n+1} = (I - K_{n+1} H_{n+1}) \phi_n \quad (20)$$

$$N_{n+1} = (I - K_{n+1} H_{n+1}) \Psi \quad (21)$$

則可由(12)~(17)式得

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} &= \left( \prod_{i=n+1}^{n+l} M_i \right) \bar{X}_n + \sum_{j=1}^{l-1} \left( \prod_{i=1+j}^l M_{n+i} \right) K_{n+l} Z_{n+j} \\ &+ K_{n+l} Z_{n+l}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

假設  $U$  於  $n\Delta t \leq t \leq (n+s)\Delta t$  輸入，即

$$U = \begin{cases} 0 & t < n\Delta t, t > (n+s)\Delta t \quad n, s > 0 \\ U_{n+r} & n\Delta t \leq t \leq (n+s)\Delta t \quad r = 0, 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (23)$$

則輸入為已知之擴展型卡爾曼濾波器為

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= \left( \prod_{i=n+1}^{n+l} M_i \right) \hat{X}_n + \sum_{j=1}^{l-1} \left( \prod_{i=1+j}^l M_i \right) \\ &(K_{n+j} Z_{n+j} + N_{n+j} U_{n+j-1}) + K_{n+l} Z_{n+l} \\ &+ N_{n+l} U_{n+l-1} \end{aligned} \quad (24)$$

令

$$\Delta X_{n+l} = \hat{X}_{n+l} - \bar{X}_{n+l} \quad (25)$$

$$\bar{Z}_{n+l} = Z_{n+l} - H_{n+l} \bar{X}_{n+l} \quad (26)$$

$$\hat{Z}_{n+l} = Z_{n+l} - H_{n+l} \hat{X}_{n+l} \quad (27)$$

則

$$\Delta X_{n+l} = M_{n+l} \Delta X_{n+l} + N_{n+l} U_{n+l-1} \quad (28)$$

再令

$$Y_{n+l} = \bar{Z}_{n+l} - H_{n+l} M_{n+l} \Delta X_{n+l-1} \quad (29)$$

將(28)式代入得

$$\bar{Z}_{n+l} - \hat{Z}_{n+l} = H_{n+l} M_{n+l} \Delta X_{n+l-1} + H_{n+l} N_{n+l} U_{n+l-1} \quad (30)$$

代回(29)式可得迴歸方程式為

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= H_{n+1} N_{n+1} U_{n+1} + \hat{Z}_{n+1} \\ &= \Phi_{n+1} U_{n+1} + \hat{Z}_{n+1} \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\Phi_{n+1} = H_{n+1} N_{n+1}$$

因此應用遞迴式最小平方估測式

$$\hat{U}_{n+1} = \hat{U}_{n+1-2} + G_{n+1-1} (\hat{Y}_{n+1} - \Phi_{n+1-1} \hat{U}_{n+1-2}) \quad (32)$$

其中

$$\hat{Y}_{n+1} = \bar{Z}_{n+1} - H_{n+1} M_{n+1} \Delta \hat{X}_{n+1-1}$$

$$\Delta \hat{X}_{n+1-1} = \Delta X_{n+1-1} \Big|_{U=\hat{U}} = M_{n+1-1} \Delta \hat{X}_{n+1-2} + N_{n+1-1} \hat{U}_{n+1-2}$$

$$\hat{U}_{n+1-1} = [0 \ 0 \ 0 \ \hat{u}_4(t_{n+1-1}) \ \hat{u}_5(t_{n+1-1}) \ \hat{u}_6(t_{n+1-1})]^T$$

$$G_{n+1-1} = V_{n+1-1} \Phi_{n+1-1}^T \xi^{-1}$$

$$V_{n+1-1} = V_{n+1-2} - V_{n+1-2} \Phi_{n+1-1}^T [\Phi_{n+1-1} V_{n+1-2} \Phi_{n+1-1}^T + \xi]^{-1}$$

$$\Phi_{n+1-1} V_{n+1-2}$$

$\hat{U}_{n+1-1}$  為一隨機變數，依據大數法則(Law of Large Number)與中央極限定理(Central Limit Theorem)[15][16]，輸入估測式之分佈為

$$\hat{U}_i \sim N(U_{bi}, V_{ii}) \quad i=4,5,6 \quad \text{當 } t \rightarrow -\infty$$

其中  $U_{bi}$  為  $\hat{U}_i$  之偏移量， $V_{ii}$  為  $\hat{U}_i$  之變異量。令檢定之假設為

$$H_0: U_i = 0 \quad \text{輸入不存在} \quad (33)$$

$$H_1: U_i \neq 0 \quad \text{輸入存在} \quad (34)$$

定義檢定統計量(Testing Statistics)

$$U_{st} = \frac{\hat{U}_i}{\sqrt{V_{ii}}} \quad (35)$$

在既定之可信水準(C Confidence Level)  $\alpha$  下得出

$$|U_{st}| \geq t_{st} \quad H_1 \text{ 成立}$$

$$|U_{st}| \leq t_{st} \quad H_0 \text{ 成立}$$

其中  $[-t_{st}, t_{st}]$  為既定  $\alpha$  下之可信度區間，亦即檢定統計量超過一門檻值(Threshold)即可視為一真實輸入，而投入EKF以估測狀態。

適應性卡爾曼濾波器之預估 (Predicted)及更新(Updated)狀態為

$$\hat{X}_{n+1/n+1}^u = \phi_{n+1} \hat{X}_{n+1/n+1}^u + \Psi \hat{U}_{n+1-1} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1/n+1}^u &= \hat{X}_{n+1/n+1}^u + \\ &K_{n+1}^u (Z_{n+1} - H \hat{X}_{n+1/n+1}^u) \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$K_{n+1}^u = P_{n+1/n+1}^u H^T (H P_{n+1/n+1}^u H^T + R)^{-1} \quad (38)$$

$$P_{n+1/n+1}^u = P_{n+1/n+1} + \phi_{n+1} L_{n+1} \phi_{n+1}^T + \Psi V_{n+1-1} \Psi^T$$

$$= P_{n+1/n+1} + P_{n+1/n+1}^u \quad (39)$$

$$P_{n+1/n+1}^u = \phi_{n+1} L_{n+1} \phi_{n+1}^T + \Psi V_{n+1-1} \Psi^T \quad (40)$$

$$L_{n+1} = 0 \quad (41)$$

$$L_{n+2} = N_{n+2} V_n N_{n+2}^T \quad (42)$$

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= \sum_{j=1}^l (\prod_{i=1+j}^l M_{k=i-1}) N_{k+j} V_{k+j-2} N_{k+j}^T (\prod_{i=1+j}^l M_{k=i-1}) \\ &= M_{n+1} L_{n+1} M_{n+1}^T \quad \text{for } l > 2 \end{aligned} \quad (43)$$

### 3.4 $\alpha$ - $\beta$ 濾波器( $\alpha\beta$ F)

令彈道飛彈之狀態向量為

$$X = [x, y, z, v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z]^T$$

$$= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]^T \quad (44)$$

假設取樣週期  $T$  內，飛彈為等速直線運動，其離散形式之動態方程式為

$$x(k+1) = F(x, t) + w(k) \quad (45)$$

$$z(k) = H(k) \cdot x(k) + v(k) \quad (46)$$

其中

$w(k)$  為程序雜訊

$v(k)$  為量測雜訊

$$H(k) = \begin{bmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$F(x, t) = [x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]^T$$

其中

$$x_4(k+1) = x_4(k) + x_7(k)T$$

$$x_5(k+1) = x_5(k) + x_8(k)T$$

$$x_6(k+1) = x_6(k) + x_9(k)T$$

$$x_7(k+1) = -\frac{\rho v^2(k)}{2\beta} g \cos \gamma_1(k) \sin \gamma_1(k)$$

$$x_8(k+1) = -\frac{\rho v^2(k)}{2\beta} g \cos \gamma_1(k) \cos \gamma_2(k)$$

$$x_9(k+1) = -\frac{\rho v^2(k)}{2\beta} g \sin \gamma_1(k) - g$$

令狀態估測式為

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k)[z(k+1) - \hat{z}(k)] \quad (47)$$

其中

$$\hat{z}(k) = H(k)\hat{x}(k)$$

$$K = [\alpha^+, \frac{\beta^+}{T}, 0]^T$$

其中  $\alpha^+$ 、 $\beta^+$  為位置與速度估測值之增益 ( $\alpha^+$ 、 $\beta^+$  係為與前節之可信水準  $\alpha$  及彈道係數

$\beta$ 區別)， $0 < \alpha^+、\beta^+ < 1$ ，且保持一常數。 $\alpha^+$ 與 $\beta^+$ 值之設定，與所預估系統之量測誤差及程序相關，為此一濾波器之中心問題[13]。

以 $\alpha$ - $\beta$ 濾波器估測 TBM 彈道，可分為平滑(Smooth)處理及預估(Prediction)兩部份。平滑係將量測值中可能出現之異常值(Outlier)，加以處理，降低其影響，再利用預估法則預估下一週期之彈道。以 TBM 之運動方程式(1)~(3)式預估 TBM 之加速度，並據以預估 TBM 之速度及位置，將預估之各值，送入 $\alpha$ - $\beta$ 濾波器中，平滑處理因雷達量測值突變之影響。

### 3.5 彈道預估

TBM 之彈道一旦估測獲得，即可將估測結果作為其後續預估彈道之初始值，代入(1)~(3)式之運動方程式中，卡爾曼濾波器以 Runge-Kutta 方法， $\alpha$ - $\beta$ 濾波器則用等加速度運動方程式(Equations of Kinematics,  $v=at$ )，依序推估  $t \geq t_k$  時各時間點之彈道以迄落地，形成預估彈道[17]。預估結果將受模式誤差及初始值影響，EKF 與 AKF 預估之差別僅在於初值不同，其餘運算均相同。

## 四、攔截解算

為使反飛彈系統得以快速且準確地完成攔截任務，必須先預估反飛彈之攔截點，預估攔截點相當於解算彈道飛彈運動方程式與反飛彈模式之交點，因此須建立反飛彈之模式，而後再建立解算攔截點之法則。

### 4.1 簡易反彈道飛彈模式

本文所引用之反飛彈系統，係採主動歸向及慣性雙重導引方式，以逆反式彈道迎擊，在預設之攔截高度實施攔截。即在反飛彈發射之前，先依據預估之彈道飛彈彈道，與預設之攔截高度，預估其攔截點，而後依循預估彈道，反向而行，迎擊彈道飛彈，依此概念建立之簡易反彈道飛彈之攔截彈道模式如圖2所示。

簡易反彈道飛彈之速度分三階段建立，依序是加力器階段( $0 \leq t \leq t_b$ )、持續推力階段( $t_b \leq t \leq t_s$ )及慣性飛行階段( $t > t_s$ )，各階段速度與飛行時間關係式為：

$$V(t) = v_0 \times \left( \frac{t}{t_b} \right) \quad \text{當 } 0 \leq t \leq t_b \quad (48)$$

$$V(t) = v_0 + v_b \times \left( \frac{t - t_b}{t_s - t_b} \right) \quad \text{當 } t_b \leq t \leq t_s \quad (49)$$

$$V(t) = v_b - v_s \times \left( \frac{t - t_s}{3} \right) \quad \text{當 } t > t_s \quad (50)$$

其中  $v_0$ 、 $v_b$ 、 $v_s$  為速度係數，由速度與時間積分後得飛行距離與速度及飛行時間關係式為：

$$S(t) = 0.5 \times V(t) \times t \quad \text{當 } 0 \leq t \leq t_b \quad (51)$$

$$S(t) = 0.5 \times V(t_b) \times t_b + 0.5 \times (1 + V(t)) \times (t - t_b) \quad \text{當 } t_b \leq t \leq t_s \quad (52)$$

$$S(t) = 0.5 \times t_b + 0.5 \times (1 + V(t_s)) \times (t_s - t_b) + 0.5 \times (V(t_s) + V(t)) \times (t - t_s) \quad \text{當 } t > t_s \quad (53)$$

參考圖2簡易反彈道飛彈之飛行路徑，若採垂直發射，則  $t_1$  秒後到達 P1 點，轉向直線飛行到預估攔截點一半高度之彈道飛彈預估彈道 P2 點，再轉向直線飛行到預估攔截點，形成三段折線，折線長度即為飛行距離，經由(51)~(53)式可反推獲得簡易反彈道飛彈之飛行時間。

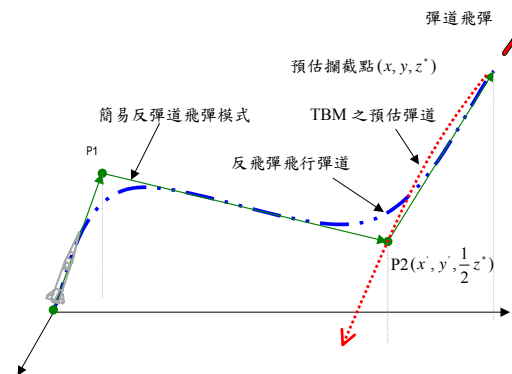


圖2. 簡易反彈道飛彈攔截彈道模式。

### 4.2 預估攔截點

在預估攔截點時，假設  $Z^*$  公里之高度為此反彈道飛彈之最佳攔截高度，在計算兩模式之交點時，加入  $Z^*$  之限制條件，因此解算步驟為：

- (1) 由戰術彈道飛彈之彈道估測與預估，計算最佳攔截高度  $Z^*$  (預估攔截點)、 $\frac{1}{2}Z^*$  (P2) 之位置及抵達  $Z^*$  之時間  $T_1$ 。

- (2) 由預估攔截點、P2、P1 及發射架位置所構成之連線，可得簡易反彈道飛彈攔截此戰術彈道飛彈之總飛行距離。
- (3) 運用(51)~(53)式建立之飛行距離與飛行時間關係式，以內插法獲得簡易反彈道飛彈之攔截飛行時間 $T_2$ 。
- (4) 一旦 $T_1 \leq T_2$ 時，反飛彈立即發射，此時預估攔截點之位置、速度及飛行時間，可運用彈道預估法則計算獲得。

## 五、模擬結果與討論

利用電腦模擬在彈道係數 $\beta=500$ 時(1)至(3)式之 TBM 運動方程式以 Runge-Kutta 法解算而得，並加入雷達量測雜訊誤差成為簡化之標準彈道，模擬具閃躲之戰術性彈道飛彈彈道，閃躲之戰術動作可視為一加速度輸入，假設加入 TBM 彈道之側向加速度如圖 3 所示，攔截高度在 10km 高處，模擬分析將以彈道估測、彈道預估、預估攔截點三階段進行，每階段均應用 EKF、AKF 與  $\alpha\beta F$  三種法則，分別比較各濾波器之性能。歸納如下：

- (1)彈道估測階段，飛彈閃躲之位置及速度估測誤差，模擬結果分別如圖 4 及圖 5 所示，誤差均方根值(Root Mean Square Error)如表 1 所示，歸納如下：

E K F：估測誤差大且收斂速度慢。

AKF：估測誤差遠小於 EKF；目標閃躲時，保持誤差小及穩定之估測，且收斂速度快。

$\alpha\beta F$ ：估測誤差遠小於 EKF 但較 AKF 稍大，對有側向加速度輸入時，估測結果變化較大，收斂時間較 AKF 慢。

- (2)彈道預估階段，加入側向加速度之彈道飛行時間為 81 秒，預估彈道開始時間自飛行時間第 6 秒起每 0.5 秒往後遞增，由飛彈落點預估誤差模擬結果如圖 6~11 所示，歸納如下：

EKF：預估之誤差遠大於 AKF 及  $\alpha\beta F$ 。

AKF：預估誤差最小且收斂速度最快，表示系統在相同之精度要求下，可發射攔截飛彈之時間較  $\alpha\beta F$  早。

$\alpha\beta F$ ：與 AKF 近似但誤差較大、收斂速度較慢。

- (3)預估攔截點階段，設定攔截高度為 10km，模擬閃躲之彈道於 10km 高時飛行時間為 45 秒，預估彈道開始時間自飛行時間第 6 秒起每 0.5 秒往後遞增，至彈道達距地面 10km 高為止，比較不同之預估彈道開始時間所獲知預估誤差情形，模擬結果如圖 12~17 及表 2 所示，歸納如下：

E K F：當飛行至第 34 秒時即抵達 10km 高位置，而後之彈道高度均 10km，故此時間以後圖形曲線有失真情形，誤差甚大。

AKF：表 2 所示，攔截點預估誤差最小。

$\alpha\beta F$ ：較 AKF 差，但明顯優於 EKF。

## 六、結論

對TBM之彈道估測，所面臨之最大問題為模式誤差無法消弭，致使傳統之擴展型卡爾曼濾波器產生相當大之誤差，且收斂時間緩慢，不能滿足反飛彈之需求。適應性卡爾曼濾波器，係應用輸入估測法，估測模式誤差，進而修正EKF，大幅改善了EKF之性能。常用之 $\alpha$ - $\beta$ 濾波器，於適當的選取參數後，其計算時間遠低於卡爾曼濾波器，對較簡單之系統，有其運用之價值。本文應用上述彈道估測法則，以特定之反飛彈系統，發展其攔截點預估法則，分析比較其優劣，由模擬分析之結果發現，適應性卡爾曼濾波器確可符合所需，是值得發展應用之法則。未來尚可探討彈道係數 $\beta$ 之影響或能同時估測 $\beta$ 值，將有助於後續彈道預估之研究。

## 七、符號說明

### 英文字母

$C_{D0}$  戰術性彈道飛彈之零升力阻力係數

$Cov[.]$  協方差

$D$  戰術性彈道飛彈之空氣阻力

$E[.]$  期望值

$g$  地球之重力加速度

$H$  量測矩陣

$I$	單位矩陣
$K$	卡爾曼增益
$m$	戰術性彈道飛彈之質量
$N$	程序雜訊
$P$	變異量矩陣
$Q$	程序雜訊變異量、變異量矩陣、動壓力
$R$	量測雜訊變異量、變異量矩陣
$S_{ref}$	戰術性彈道飛彈之參考面積
$T$	取樣週期
$t_{st}$	可信度區間
$U, U_n$	系統輸入
$u_{st}$	檢定統計量
$\hat{u}, \hat{u}_n$	系統輸入估測值
$v$	戰術性彈道飛彈之速度、量測雜訊
$v_x, v_y, v_z$	戰術性彈道飛彈之三軸向速度
$v_o, v_b, v_s$	簡易反彈道飛彈速度係數
$w$	程序雜訊
$X$	狀態向量
$\hat{X}_{i+1/i+1}, \hat{X}_{i+1/i}$	有系統輸入之Kalman濾波器 之估測值
$\bar{X}_{i+1/i+1}, \bar{X}_{i+1/i}$	無系統輸入之Kalman濾波器 之估測值
$Z$	量測值向量
$Z^*$	最佳攔截高度

### 希臘字母

$\alpha$  可信度水準增益係數

$\alpha^+$	位置增益係數
$\beta$	彈道係數
$\beta^+$	速度增益係數
$\Gamma$	輸入矩陣
$\delta_{ij}$	Dirac delta函數
$\phi$	狀態轉移矩陣
$\rho$	大氣密度
$\wedge$	追蹤引號
$\xi$	量測雜訊
$\zeta$	程序雜訊
$\sigma_w, \sigma_n$	程序雜訊及量測雜訊之標準差

## 八、參考文獻

- [1] Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," ASME Journal of Basic Engineering, Series 82d, pp. 35-45, 1960.
- [2] Sorenson, H. W., Parameter Estimation: Principles and Problem, Mariel Dekker Inc., N. Y., 1985.
- [3] Chang, C. B., Whiting, R. H., and Athan, M., "On the State and Parameter Estimation for Maneuvering Reentry Vehicles," IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 22, No. 1, pp. 99-105, 1977.
- [4] Chan, Y. T., Hu, A. C., and Plant, J. B., "A Kalman Filter Based Tracking Scheme with Input Estimation," IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 15, pp. 237-242, 1979.
- [5] Chan, Y. T., Plant, J. B., and Bottomly, j., "A Kalman Tracker with a Simple Input Estimator," IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 18, No. 2, pp. 235-239, 1982.
- [6] Bogler, T. L., "Tracking a Maneuvering Target Using Input Estimation," IEEE Transaction on Aerospace and Electronic



- Systems, AES-23, pp. 298-303, 1987.
- [7] Meng, H. H., Aircraft Maneuver Detection Using an Adaptive Kalman Filter, Naval Postgraduate School, Monterey, 1989.
- [8] Mendel, J. M., Lessons in Estimation Theory for Signal Processing, Communications and Control, Prentice Hall International Inc., N. J., 1995.
- [9] Tuan, P. C. and Fong, L. W., "An IMM Tracking Algorithm with Input Estimation," *International Journal of System Science*, Vol. 27, No. 7, pp. 629-639, 1996.
- [10] Hsia, T. C., System Identification Least-Square Method, Lexington Books 1979.
- [11] Lee, S. C. and Liu, C. Y., "Improved Trajectory Estimation of Reentry Vehicles from Radar Measurements Using On-Line Adaptive Input Estimator," *IEICE Transactions on Fundamental*, E81-A(9), pp. 1867-1872, 1998.
- [12] Tuan, P. C., Lee, S. C., Wang, H. M., and Hou, C. T., "A Study of Algorithms for Anti-Tactical Ballistic Missile Intercept Point Prediction," *Proceeding of Eleventh National Conference on Science and Technology of National Defence*, 2002.
- [13] Kalata, P. R., "The Tracking Index: A Generalized Parameter for  $\alpha$ - $\beta$  and  $\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$  Target Trackers," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 29, No. 2, pp. 174-181, 1984.
- [14] Gleb, A., Applied Optimal Estimation, M. I. T. Press, Cambridge, 1974.
- [15] Ross, S. M., Introduction to Probability Models, 3<sup>rd</sup> Ed., McGraw-Hill, N. Y., 1985.
- [16] Hoel, P. G., Introduction to Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, N. Y., 1984.
- [17] Googwin, G. C. and Sin, K. S., Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice Hall, N. Y., 1984.

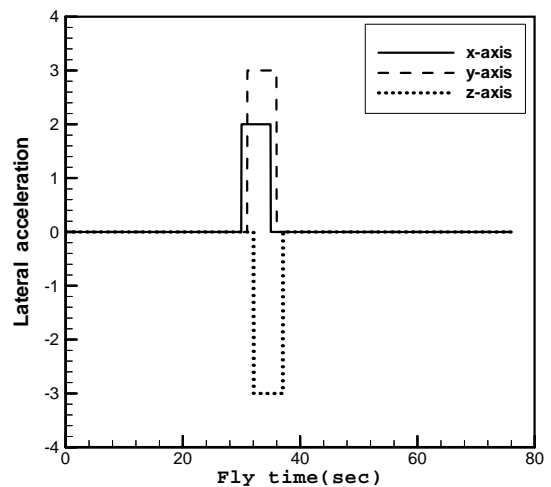


圖3. 飛彈閃躲時加入三軸向之側向加速度。

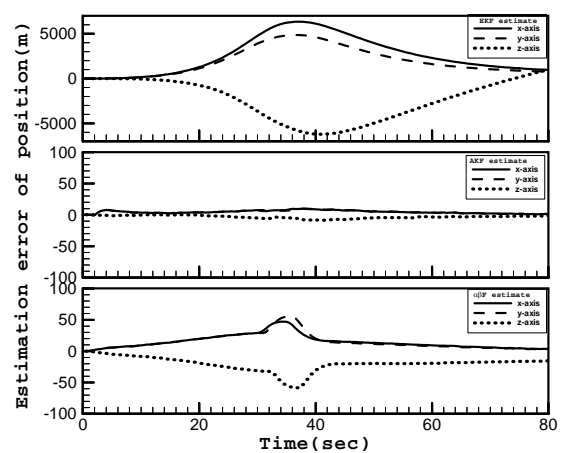


圖4. 飛彈閃躲之位置估測誤差。

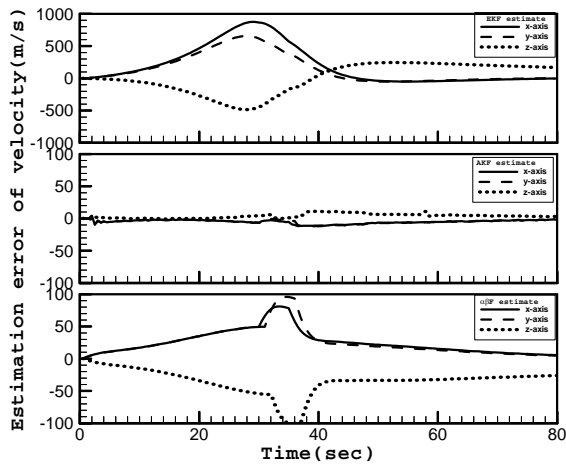


圖5. 飛彈閃躲之速度估測誤差。

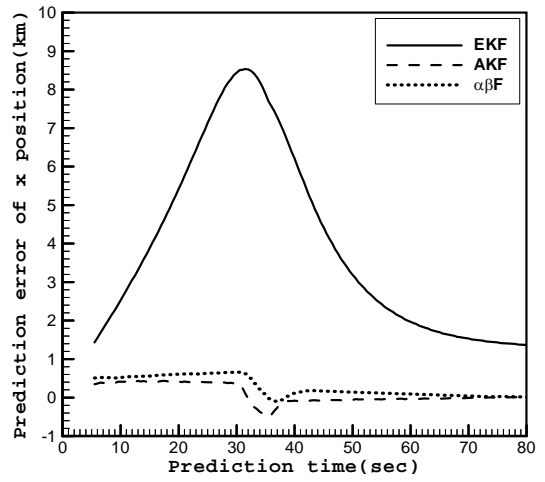


圖7. 飛彈閃躲之x軸向位置預估誤差比較 (ALT=0km)。

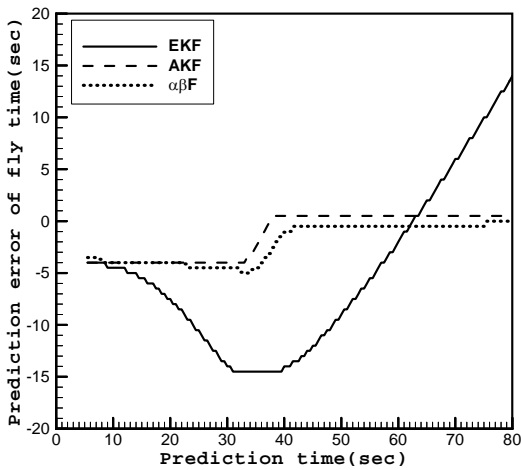


圖6. 飛彈閃躲之飛行時間預估誤差比較 (ALT=0km)。

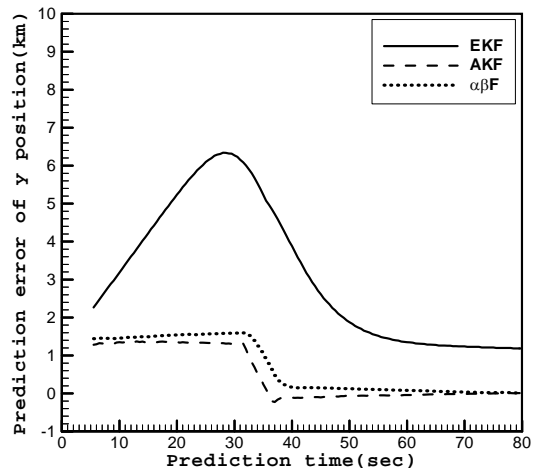


圖8. 飛彈閃躲之y軸向位置預估誤差比較 (ALT=0km)。

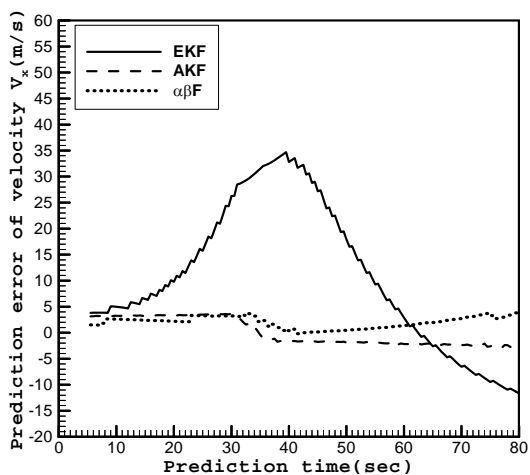


圖9. 飛彈閃躲之x軸向速度預估誤差比較 (ALT=0km)。

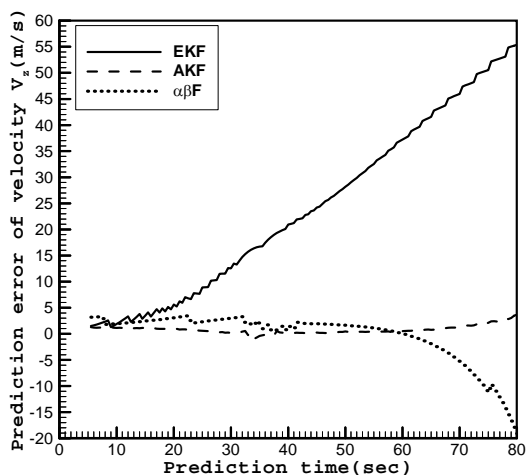


圖11. 飛彈閃躲之z軸向速度預估誤差比較 (ALT=0km)。

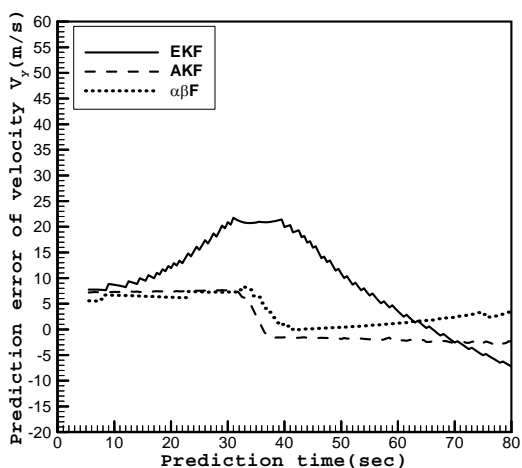


圖10. 飛彈閃躲之y軸向速度預估誤差比較 (ALT=0km)。

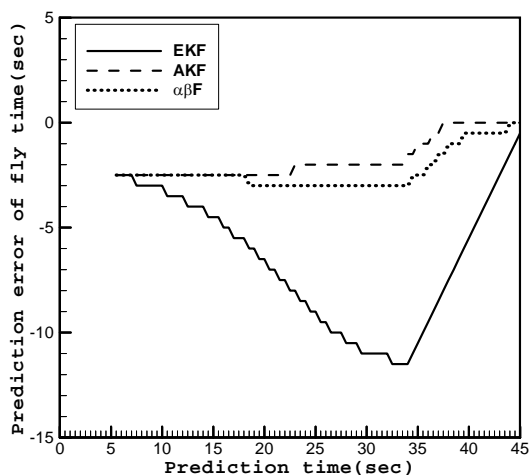


圖12. 飛彈閃躲之飛行時間預估誤差比較 (ALT=10km)。

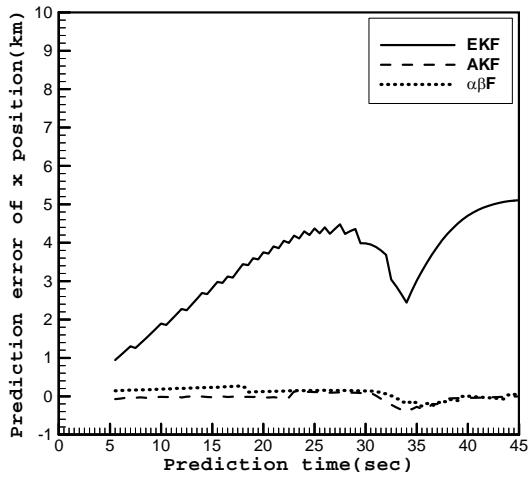


圖13. 飛彈閃躲之x軸向位置預估誤差比較 (ALT=10km)。

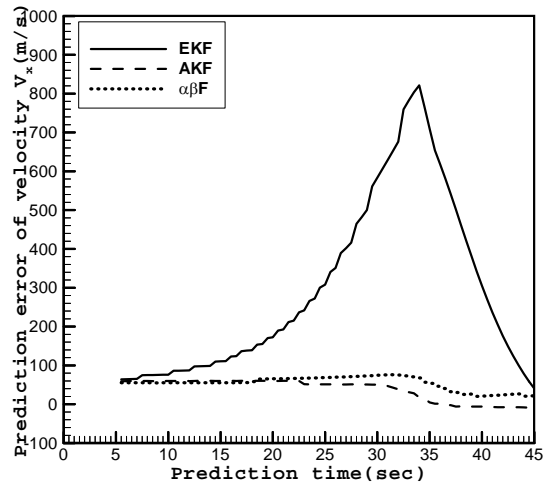


圖15. 飛彈閃躲之x軸向速度預估誤差比較 (ALT=10km)。

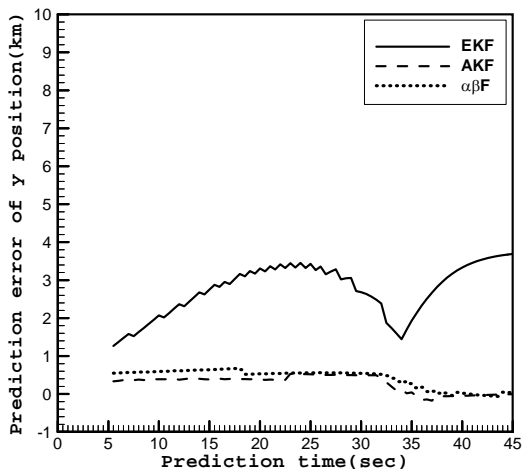


圖14. 飛彈閃躲之y軸向位置預估誤差比較 (ALT=10km)。

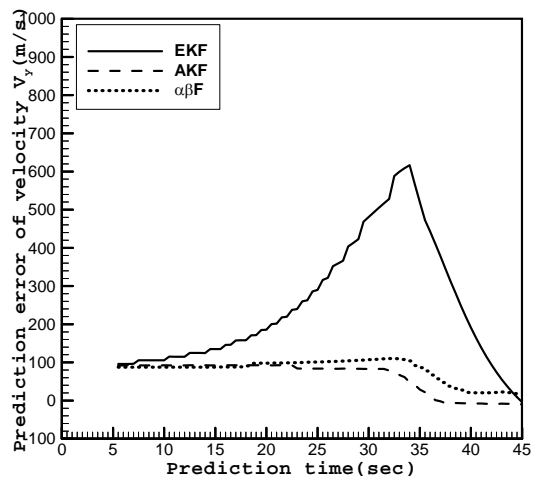


圖16. 飛彈閃躲之y軸向速度預估誤差比較 (ALT=10km)。

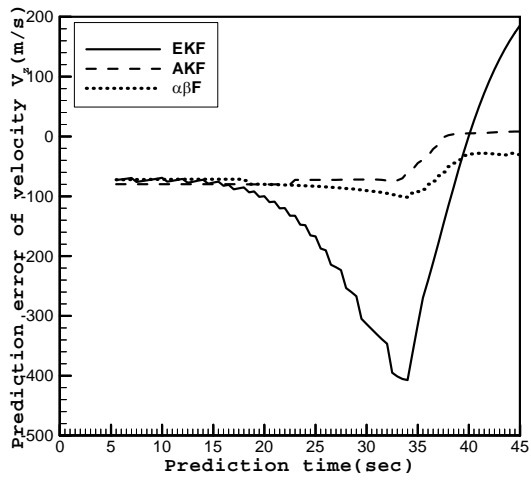


圖17. 飛彈閃躲之z軸向速度預估誤差比較  
(ALT=10km)。

表1. 簡化彈道估測誤差均方根值。

β值	濾波器種類	側向加速度	估測誤差之均方根值					
			x (m)	y (m)	z (m)	V <sub>x</sub> (m/s)	V <sub>y</sub> (m/s)	V <sub>z</sub> (m/s)
500	EKF	0	2852.1	2169.8	2809.9	324.9	243	222.8
		圖5.4	2661	2010.4	2626	316.6	237.4	223.4
	AKF	0	4.9	4.9	3.7	5.1	5.1	4.4
		圖5.4	4.9	4.9	3.8	5.1	5.2	4.5
	α βF	0	17.8	17.8	22.8	30.1	30.1	38.7
		圖5.4	18.8	19.9	23.8	31.9	34	40.6

註：均方根值= $\sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n}}$ ，其中 $\Delta x_i$ 為誤差值， $n$ 為誤差值之數量

表2. 簡化彈道攔截點預估誤差及諸元。

攔截高度			10公里					
濾波器種類			EKF		AKF		α βF	
側向加速度			0	圖5	0	圖5	0	圖5
攔截點 預估 誤差	位置 (m)	X軸	3451.3	3594.4	-4.5	106.3	37.7	152.6
		Y軸	2650.1	3237.6	-4.5	513.1	37.7	559.4
	速度 (m/s)	X軸	119.9	155	0.7	51.2	17.7	68.7
		Y軸	101.8	171.2	0.7	83.7	17.7	101.1
		Z軸	-32	-91.9	-3.5	-72.5	-13.7	-83.3
	飛行時間 (sec)		-4.5	-6	0	-2	-1	-3
反飛彈 飛行距離(km)		13.8	14.6	12.3	11.6	12.1	11.6	
反飛彈 飛行時間(sec)		19.9	20.5	18.42	17.5	18.1	17.7	
反飛彈 發射時間(sec)		P+19.5	P+19	P+25.5	P+26	P+24.5	P+25	

註：反飛彈發射時間為反飛彈可於預設攔截高度迎擊目標之發射時機，其中P代表系統開始接戰之基準時間。