

六加速儀機制導航應用與方向誤差校準方法之研究

洪兆宇 方淳民 王振宇 李守誠

國防大學中正理工學院兵器工程學系

摘 要

固裝式慣性導航系統(Strap-down Inertial Navigation System, INS)之精度與感測元件之原始偏差(Bias)、比例因子(Scale Factor)、初始校準(Alignment)、安裝誤差等因素均息息相關；本論文的貢獻有二：第一，對一種固裝式六加速儀機制之慣性組件，應用重力影響，提出一種方向誤差校準方法(Orientation Calibration)，以求得此慣性組件加速儀安裝之誤差角(Orientation Error)、加速儀的偏差量及比例因子等；第二，考量重力場效應影響，對 Chen's 固裝式六加速儀機制導航模式做修正，更符合實際加速儀模式，結合六加速儀機制之修正導航理論及方向誤差校準方法，模擬兩範例結果，可大幅降低系統誤差，有效提升系統導航精度，執行導航功能。

關鍵詞：慣性導航系統固裝式，校準，安裝誤差角，比例因子，偏差量

The Research of Six-Accelerometers Schemes and Orientation Calibration Method for Navigation Application

Chao-Yu Hung, Chun-Min Fang, Chen-Yu Wang, and Sou-Chen Lee

*Department of Weapon System Engineering,
Chung Cheng Institute of Technology,
National Defense University*

ABSTRACT

The navigation error of the strap-down inertial navigation system (INS) is concerning deeply with the accuracy of the sensor's bias, scale factor and initial alignment. In this paper, there are two important issues for research. One is to develop a novel orientation calibration method by gravity effect. The other one is to add the gravitational field effect into original Chen's strap-down six-accelerometer schemes model to achieve a more realistic models. Combining the proposed orientation calibration method and the modify principle of inertia navigation system on the strap-down six-accelerometer schemes, we have a superior results of the system error was calibrated and improved the navigation accuracy after compensation.

Keywords : INS, strap-down, calibration, misalignment angle, scale factor, bias

文稿收件日期 93.5.24; 文稿修正後接受日期 93.9.6.
Manuscript received May 24, 2004; revised Sept. 6, 2004.

一、前言

慣性導航系統使用慣性組件量測載具的加速度與角速度，經積分後可決定航具(Vehicle)相對於參考座標系(Reference Coordinate Frame)或移動座標系(Moving Coordinate)之位置、速度及姿態[1]，無需外加資訊或輔助設備，其自成一自給(Self-Contained)系統。傳統實用慣性導航系統在 1948 年問世，運用陀螺儀(Gyroscope)、加速儀(Accelerometer)等慣性組件，量測計算載具運動狀態，然傳統機械式陀螺儀因受機構磨擦影響，會有漂移現象(Drift)，且價格較為昂貴；1965 年 DiNapoli, L. D. 研究不使用陀螺儀量測角速度[2]；1967 年 Schuler, Grammatikos, Fegler 三位學者提出單獨使用加速儀量取加速度與角速度[3]，取代傳統陀螺儀與加速儀組合之慣性導航系統，避免陀螺儀漂移現象，該文認為至少需九顆加速儀，方可完整解析一航具運動。後續在加速儀研究上，1975 年 Padgoankar, A. J. 等三位及 Liu, Y. K. 研究使用加速儀量測剛體角加速度[4]，1967 年 Mital, N. K. 等二位學者研究使用加速儀量測旋轉運動[5]，1989 年 Bulmash, G 等四位學者應用九顆加速儀研究爆炸之目標變位情形[6]，1991 年 Algrain, Marcelo C. 等二位學者應用九顆加速儀及三顆陀螺儀對於剛體在三維空間中作即時角速度估測[7]。

六加速儀機制首創於 1994 年由 Chen, J. H. 等三位學者共同發表[8]，係將六顆加速儀設計一適當配置安置於航具上，六顆加速儀以其所在不同位置可感測航具運動物理量，經數值運算可解析航具之位置、速度及姿態。全加速儀

導航不同於傳統 INS 無需使用陀螺儀，其優點為具對稱性(Symmetry)，使導航計算角加速度非常容易，且構型簡潔精緻體積小，價格便宜；然缺點是角速度誤差較傳統 INS 對時間較敏感，影響導航精度，故使用時應注意誤差發散現象。

本實驗室近年來在全加速儀理論開發中，研究利用六加速儀機制，藉由重力指示，解決初始姿態角問題[9]，另有關全加速儀機制硬品實現上，Kirill Semyonovich Mostov 運用六加速儀理論，設計一組慣性導航機制，並對於導航誤差作一探討[10]，另學者黃復聰將六組單軸加速儀與全球定位系統整合，運用卡爾曼濾波器(Kalman Filter)估測方位[11]。對於導航運用上均有參考運用價值。

六加速儀機制理論係運用加速儀相對於慣性座標加速度，推導出載具飛行狀態，在 Chen's 等固裝式六加速儀理論中，並未考慮載具姿態(Attitude)及單位質量引力(Gravitation)之作用，加速儀輸出僅為載具之接觸加速度(Contact Acceleration)。為更真實反映實際狀況，本文考量重力場效應下對六加速儀機制理論再作補強。

另加速儀安置方向及位置誤差，與加速儀原始誤差均將影響加速儀輸出值，然由於六加速儀慣性導航系統係由六顆加速儀組成，如將每一加速儀個別校準，仍無法獲得系統誤差，故須將整組慣性導航系統實施校準，方可獲得系統之方向誤差、位置誤差與加速儀原始誤差。另方向誤差影響加速儀輸出結果，可藉由靜態時不同方向重力作用校準獲得。而位置誤差僅影響加速儀切向及向心加速度值，可藉由

實驗室旋轉平台獲得。本文將提供一方向誤差校準方法，以解析方式求得六加速儀機制安裝誤差，及各加速儀原始偏差與比例因子，以利爾後實際運用。

文章內容共區分七章，第一章為前言介紹相關全加速儀機制慣性導航系統演進及本文研究方向；第二章推導六加速儀數學模式，將導入單位質量引力作用，使系統模式更符合實際；第三章依據第二章推導結果，說明重力場效應下六加速儀機制計算流程；第四章提出六加速儀機制方向誤差校準模式，以獲得校準數學模式；第五章為六加速儀機制方向誤差校準參數獲得，將運用估測方法求得校準參數；第六章為校準方法模擬驗證，以電腦程式模擬驗證六加速儀機制校準結果；第七章則對本文作一結論。

二、六加速儀機制數學模式

2.1 方向餘弦導數

慣性導航理論需要精準定義幾種座標系統，用以表示運動與慣性座標之關係。為描述載具運動狀態與慣性座標關係，本文將以體座標(Body-Frame)與慣性座標(Inertial-Frame)來表示各種幾何關係。慣性座標係定義一座標系相對於恆星沒有任何加速度之座標系統，另體座標係以載具滾轉(Roll)、俯仰(Pitch)及偏航(Yaw)方向定義座標系統；考量一與時間有關之方向餘弦矩陣 C_i^b ，表示體座標系(Body-Frame)與慣性座標系(Inertial-Frame)間轉換矩陣，則方向餘弦導數為[12]：

$$\dot{C}_b^i = C_b^i [\bar{\omega}_{ib}^b \times] \quad (1)$$

(1)式中 $\bar{\omega}_{ib}^b$ 為體座標相對於慣性座標角速度，以體座標表示且

$$[\bar{\omega}_{ib}^b \times] \Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 加速儀數學模式

加速儀為一精確之量測儀具，其所量得之量 f 為一向量，稱為比力(Specific Force)。可定義如下[13]：

$$\bar{a} = \bar{f} + \bar{G} \quad (2)$$

(2)式中 \bar{a} 為慣性加速度， \bar{G} 為每單位質量之引力(Gravitation)它為一超距力。在導航計算中， \bar{G} 無法由感測器量測，與位置及高度有關，必須由計算獲得。

為便於描述加速儀之運動，以 O_I 代表慣性座標系統(Inertial Frame)原點，以 o_b 代表體座標系統(Body Frame)原點，設質點 P 位於體座標上，為固裝量測元件之位置，則幾何關係如圖 1 表示，

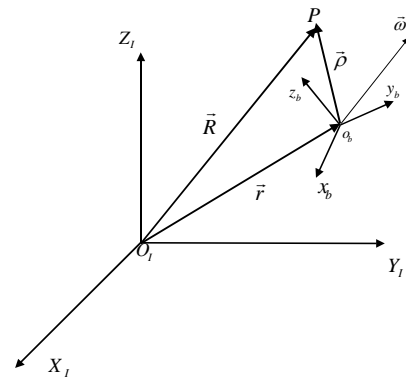


圖 1. 固裝量測元件 P 與慣性座標 (O_I) 及體座標 (o_b) 關係圖。

圖 1 中 \vec{R}^i 及 \vec{r}^i 表示慣性座標原點 O_I 至固裝量測元件 P 及 o_b 位置向量，並以慣性座標描述；另 $\vec{\rho}^b$ 係表體座標原點 o_b 至固裝量測元件 P 位置向量，並以體座標描述。則相對於慣性座標加速度可表為[14,15]：

$$p_i^2(\vec{R}^i) = p_i^2(\vec{r}^i + \vec{\rho}^b)$$

其中 $p_i^2(\bullet) \triangleq \frac{d^2}{dt^2}(\bullet)_i$ ；表示變數 (\bullet) 相對於慣性座標對時間二次導數；則固裝量測元件 P 相對於慣性座標加速度：

$$\vec{R}^i = \vec{r}^i + \ddot{\vec{\rho}}^b + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b + 2\vec{\omega}_{ib}^b \times \dot{\vec{\rho}}^b + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b \quad (3)$$

其中 \vec{r}^i 表示體座標系統原點相對於慣性座標線性加速度， $\ddot{\vec{\rho}}^b$ 為加速儀相對於體座標線性加速度， $\dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b$ 為加速儀相對於慣性座標切向速度， $2\vec{\omega}_{ib}^b \times \dot{\vec{\rho}}^b$ 為科氏加速度， $\vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b$ 為向心加速度。另比較(2)式及(3)式可得：

$$\vec{a} = \vec{R}^i$$

因固裝量測元件相對於體座標位置向量 $\vec{\rho}^b$ 不隨時間改變，故 $\dot{\vec{\rho}}^b = \ddot{\vec{\rho}}^b = 0$ ；則質點 P 相對於慣性座標加速度為

$$\vec{a} = \vec{r}^i + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b \quad (4)$$

將(2)式代入(4)式可得單位質量之引力 \vec{G} 與固裝量測元件加速度關係為

$$\vec{f} + \vec{G} = \vec{r}^i + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b \quad (5)$$

(5)式中 \vec{f} 為比力，係量測元件之接觸力以體座標表示，另單位質量之引力 \vec{G} 在地球局部地區可以切平面(Tangent Plane)表示，透過座標轉換矩陣 C_i^j 可轉換為慣性座標表示；由於加速儀輸出須由體座標來計算，因此將(5)式透過座標轉換矩陣，將各項加速度改以體座標描述：

$$\vec{f}^b + C_i^b \vec{G}^i = C_i^b \vec{r}^i + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}^b \quad (6)$$

(6)式中座標轉換矩陣 C_i^b 為時間函數，須由(1)式方向餘弦導數推導求得。

2.3 六加速儀方程式

考慮一邊長為 2ρ 之正立方體，則六個加速儀配置如圖 2 所示，加速儀感測軸沿其所在立方體表面之對角線，連接這些對角線恰成一正四面體，四個頂點為 A, B, C, D。加速儀之位置分置於四面體每一邊之中點，與六加速儀機制中心點距離 ρ 。

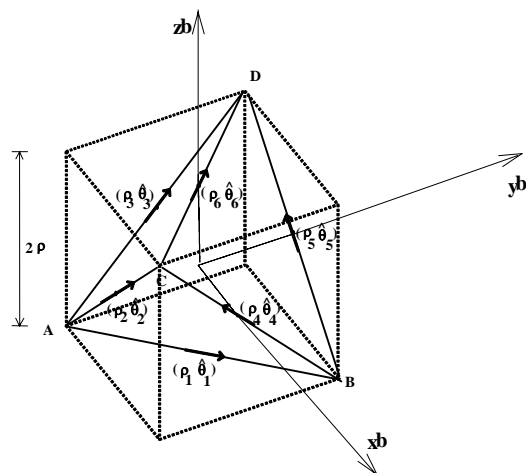


圖 2. 六個加速儀配置圖。

由圖 2 知每一加速儀位置及感測方向如表 1，

表 1. 六加速儀機制編號、位置向量及感測軸
單位向量。

| 加速儀 編號 | 加速儀 位置向量 | 感測軸 單位向量 |
|-----------|--------------------------------------|--|
| 1 | $\vec{\rho}_1^b = [0 \ 0 \ -\rho]^T$ | $\vec{\theta}_1^b = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 1 \ 0]^T$ |
| 2 | $\vec{\rho}_2^b = [0 \ -\rho \ 0]^T$ | $\vec{\theta}_2^b = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 0 \ 1]^T$ |
| 3 | $\vec{\rho}_3^b = [-\rho \ 0 \ 0]^T$ | $\vec{\theta}_3^b = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ 1 \ 1]^T$ |
| 4 | $\vec{\rho}_4^b = [\rho \ 0 \ 0]^T$ | $\vec{\theta}_4^b = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ -1 \ 1]^T$ |
| 5 | $\vec{\rho}_5^b = [0 \ \rho \ 0]^T$ | $\vec{\theta}_5^b = \frac{1}{\sqrt{2}} [-1 \ 0 \ 1]^T$ |
| 6 | $\vec{\rho}_6^b = [0 \ 0 \ \rho]^T$ | $\vec{\theta}_6^b = \frac{1}{\sqrt{2}} [-1 \ 1 \ 0]^T$ |

其中 $\vec{\theta}_j$ 表第 j 類加速儀感測方向之單位向量， $\vec{\rho}_j$ 表六加速儀機制中心至第 j 類加速儀位置單位向量。由(6)式知每類加速儀相對於慣性座標加速度在感測方向投影量分別為：

$$\left(C_i^b \ddot{r}^i + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^b + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^b \right) \cdot \vec{\theta}_j \quad (7)$$

其中 $j=1, \dots, 6$ 為加速儀編號；令

$$A_j = \left(\vec{f}^b + C_i^b \vec{G}^i \right) \cdot \vec{\theta}_j$$

由(6)、(7)式整理得

$$A_j = \left(C_i^b \ddot{r}^i + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^b + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^b \right) \cdot \vec{\theta}_j \quad (8)$$

依表一所示各加速儀位置、方向，分別代入(8)式整理，並表成矩陣形式：

$$A = [\rho S^T \quad T^T] \begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \\ C_i^b \ddot{r}^i \end{bmatrix} - \rho T^T \vec{\omega}^2 \quad (9)$$

其中 $A = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6]^T$ ；為加速度矩陣，

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \text{為位置}$$

矩陣，

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \text{為方向矩}$$

陣，

$$\vec{\omega}^2 \triangleq \begin{bmatrix} \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix} ; \text{為向心加速度矩陣。}$$

(9)式移項整理後可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \\ C_i^b \ddot{r}^i \end{bmatrix} = [\rho S^T \quad T^T]^{-1} (A + \rho T^T \vec{\omega}^2) \quad (10)$$

其中 $[\rho S^T \quad T^T]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S/\rho \\ T \end{bmatrix}$ 代入(10)式展開獲

得六加速儀機制方程式

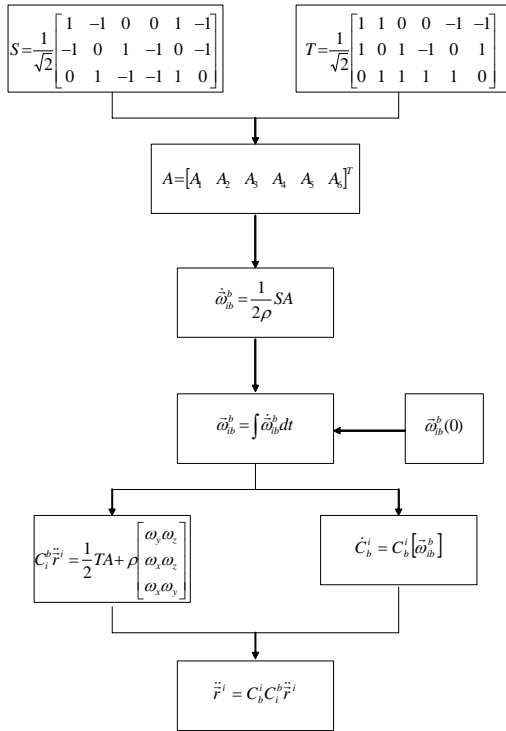


圖 4. 六加速儀機制計算流程圖。

四、六加速儀機制方向誤差校準模式

由(11)式之結果顯示，使用六個加速儀經適當配置，可獲得航具相對慣性座標之加速度與角加速度。然而慣性導航精度與系統誤差有關，六加速儀導航系統主要誤差來源計有每顆加速儀原始偏差、比例因子，系統安裝時方向誤差及位置誤差，然而每顆加速儀出廠時規格並不等於系統規格，仍須以校準方法獲得。其中因位置誤差可藉由實驗室平台旋轉調校，故本節僅討論加速儀之方向誤差之校準。本文將提出六加速儀機制方向誤差校準方法，以獲得加速儀之安裝的誤差角、加速儀的偏差量及比例因子，以利六加速儀機制慣性導引系統量測修正並予補償使用。

由於六加速儀機制中，具有六顆加速儀，

不同加速儀感測不同方向加速度，此六個方向於空間中線性相依，故無法同時進行方向誤差校準，故本文區分兩組加速儀，實施方向誤差校準工作。考慮各組加速儀感測方向線性獨立，由附表一知加速儀方向分別為 $\bar{\theta}_j^b; j=1 \dots 6$ ，須選定一組三個方向加速儀線性獨立，判斷方法為

$$\det \begin{bmatrix} \bar{\theta}_p^b & \bar{\theta}_q^b & \bar{\theta}_r^b \end{bmatrix} \neq 0; \quad p \neq q \neq r \quad (12)$$

將附表一代入(12)式可得六種線性獨立組合，如表 2。

表 2. 六組線性獨立可執行六加速儀機制校準組合。

| | |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^b & \bar{\theta}_2^b & \bar{\theta}_5^b \end{bmatrix};$ | $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^b & \bar{\theta}_3^b & \bar{\theta}_4^b \end{bmatrix};$ |
| $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_3^b & \bar{\theta}_4^b & \bar{\theta}_6^b \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_2^b & \bar{\theta}_5^b & \bar{\theta}_6^b \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^b & \bar{\theta}_2^b & \bar{\theta}_6^b \end{bmatrix};$ | $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^b & \bar{\theta}_3^b & \bar{\theta}_6^b \end{bmatrix};$ |
| $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_3^b & \bar{\theta}_4^b & \bar{\theta}_5^b \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_2^b & \bar{\theta}_4^b & \bar{\theta}_5^b \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_2^b & \bar{\theta}_3^b & \bar{\theta}_4^b \end{bmatrix};$ | $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_2^b & \bar{\theta}_3^b & \bar{\theta}_5^b \end{bmatrix};$ |
| $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^b & \bar{\theta}_5^b & \bar{\theta}_6^b \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^b & \bar{\theta}_4^b & \bar{\theta}_6^b \end{bmatrix}$ |

本文選定 $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_2^b & \bar{\theta}_3^b & \bar{\theta}_5^b \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^b & \bar{\theta}_4^b & \bar{\theta}_6^b \end{bmatrix}$ 兩組，分組實施方向誤差校準。

4.1 #2、#3、#5 加速儀輸出方程式

設理論加速儀方向為 $\bar{\theta}_j^a; j=1 \dots 6$ ；因基座加工及安裝誤差，使得實際加速儀方向為

$\bar{\theta}_j^{a'}; j=1\cdots 6$ 。另載具所受加速度 $\bar{a}^b = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ ，與#2、#3、#5 加速儀輸出值關係可表為

$$\bar{a}^{a'} = C_a^{a'} C_b^a \bar{a}^b \quad (13)$$

其中

$$C_a^{a'} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\beta_{xz} & \sin\Delta\beta_{xz} & 0 \\ -\sin\Delta\beta_{xz} & \cos\Delta\beta_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Delta\beta_{xy} & 0 & -\sin\Delta\beta_{xy} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Delta\beta_{xy} & 0 & \cos\Delta\beta_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\beta_{yx} & \sin\Delta\beta_{yx} \\ 0 & -\sin\Delta\beta_{yx} & \cos\Delta\beta_{yx} \end{bmatrix}$$

上式中 $\Delta\beta_{mn} \rightarrow 0$ ； $m; n$ 分別各代表下標 x, y, z 。所以

$$C_a^{a'} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\beta_{xz} & -\Delta\beta_{xy} \\ -\Delta\beta_{yz} & 1 & \Delta\beta_{yx} \\ \Delta\beta_{zy} & -\Delta\beta_{zx} & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$C_b^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

將(14)及(15)式代入(13)式，則

$$C_b^{a'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1+\Delta\beta_{xy}) & \Delta\beta_{xz} & (1+\Delta\beta_{xz}-\Delta\beta_{xy}) \\ -(\Delta\beta_{yz}+\Delta\beta_{yx}) & 1 & (1+\Delta\beta_{yx}-\Delta\beta_{yz}) \\ -(1-\Delta\beta_{zy}) & -\Delta\beta_{zx} & (1-\Delta\beta_{zx}+\Delta\beta_{zy}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

則(13)式以矩陣表示為

$$\begin{bmatrix} a_2^{a'} \\ a_3^{a'} \\ a_5^{a'} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1+\Delta\beta_{xy}) & \Delta\beta_{xz} & (1+\Delta\beta_{xz}-\Delta\beta_{xy}) \\ -(\Delta\beta_{yz}+\Delta\beta_{yx}) & 1 & (1+\Delta\beta_{yx}-\Delta\beta_{yz}) \\ -(1-\Delta\beta_{zy}) & -\Delta\beta_{zx} & (1-\Delta\beta_{zx}+\Delta\beta_{zy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x^b \\ a_y^b \\ a_z^b \end{bmatrix} \quad (17)$$

考量加速儀本身輸出偏差量(Bias)影響，(17)式

改寫為

$$\begin{bmatrix} a_2^{a'} \\ a_3^{a'} \\ a_5^{a'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{a_2}(T) \\ b_{a_3}(T) \\ b_{a_5}(T) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1+\Delta\beta_{xy}) & \Delta\beta_{xz} & (1+\Delta\beta_{xz}-\Delta\beta_{xy}) \\ -(\Delta\beta_{yz}+\Delta\beta_{yx}) & 1 & (1+\Delta\beta_{yx}-\Delta\beta_{yz}) \\ -(1-\Delta\beta_{zy}) & -\Delta\beta_{zx} & (1-\Delta\beta_{zx}+\Delta\beta_{zy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x^b \\ a_y^b \\ a_z^b \end{bmatrix} \quad (18)$$

加速儀量測輸出值 P_a 係以電子訊號量測，其訊號強弱與加速度大小間存在比例因子 SF_a (Scalar Factor) 關係；輸出值 P_{aj} 下標數值表示編號為 j 加速儀電子訊號，因此(18)式分別表示為：

$$P_{a_2} = SF_{a_2}(T) \int_0^T \left(b_{a_2}(T) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(1+\Delta\beta_{xy})a_x^b + \Delta\beta_{xz}a_y^b + (1+\Delta\beta_{xz}-\Delta\beta_{xy})a_z^b \right] \right) dt \quad (19a)$$

$$P_{a_3} = SF_{a_3}(T) \int_0^T \left(b_{a_3}(T) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-(\Delta\beta_{yz}+\Delta\beta_{yx})a_x^b + a_y^b + (1+\Delta\beta_{yx}-\Delta\beta_{yz})a_z^b \right] \right) dt \quad (19b)$$

$$P_{a_5} = SF_{a_5}(T) \int_0^T \left(b_{a_5}(T) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-(1-\Delta\beta_{zy})a_x^b - \Delta\beta_{zx}a_y^b + (1-\Delta\beta_{zx}+\Delta\beta_{zy})a_z^b \right] \right) dt \quad (19c)$$

4.2 #1、#4、#6 加速儀輸出方程式

運用相同方法可得載具所受加速度 $\bar{a}^b = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ 與#1、#4、#6 加速儀輸出值轉換矩陣為

$$C_b^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$C'_a = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\alpha_{xz} & -\Delta\alpha_{xy} \\ -\Delta\alpha_{yz} & 1 & \Delta\alpha_{yx} \\ \Delta\alpha_{zy} & -\Delta\alpha_{zx} & 1 \end{bmatrix};$$

$$C'_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1+\Delta\alpha_{xy}) & (1-\Delta\alpha_{xz}-\Delta\alpha_{xy}) & \Delta\alpha_{xz} \\ -(\Delta\alpha_{yz}+\Delta\alpha_{yx}) & -(1+\Delta\alpha_{yz}-\Delta\alpha_{yx}) & 1 \\ -(1-\Delta\alpha_{zy}) & (1+\Delta\alpha_{zx}+\Delta\alpha_{zy}) & -\Delta\alpha_{zx} \end{bmatrix};$$

考量加速儀本身輸出偏差量，及比例因子 SF_a (Scalar Factor) 關係；輸出值 P_{aj} 可表為

$$P_{a1} = SF_{a1}(T) \int_0^T \left(b_{a1}(T) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(1+\Delta\alpha_{xy})a_x + (1-\Delta\alpha_{xy}-\Delta\alpha_{xz})a_y + \Delta\alpha_{xz}a_z \right] \right) dt \quad (20a)$$

$$P_{a4} = SF_{a4}(T) \int_0^T \left(b_{a4}(T) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-(\Delta\alpha_{yz}+\Delta\alpha_{yx})a_x - (1+\Delta\alpha_{yz}-\Delta\alpha_{yx})a_y + a_z \right] \right) dt \quad (20b)$$

$$P_{a6} = SF_{a6}(T) \int_0^T \left(b_{a6}(T) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-(1-\Delta\alpha_{zy})a_x + (1+\Delta\alpha_{zy}+\Delta\alpha_{zx})a_y - \Delta\alpha_{zx}a_z \right] \right) dt \quad (20c)$$

五、六加速儀方向誤差校準參數獲得

前節中各組須校準加速儀待求參數計有誤差角、加速儀輸出偏差量及比例因子等十二個未知參數，本文將利用六加速儀機制各種姿態，針對重力場作用於加速儀之不同影響，獲得各組加速儀之量測方程式。

5.1 #2、#3、#5 加速儀量測方程式

由六組已知體座標系加速度，將產生十八組方程式以求得所需參數，令此六組體座標系加速度如表 3。

表 3. #2、#3、#5 加速儀方向誤差校準六組體座標系加速度。

| 組別 | 體座標系加速度 | 組別 | 體座標系加速度 |
|----|--|----|---|
| 1 | $\vec{a}_{b1} = \frac{g}{\sqrt{2}}[-1 \ 0 \ 1]^T$ | 4 | $\vec{a}_{b4} = -\frac{g}{\sqrt{2}}[1 \ 0 \ 1]^T$ |
| 2 | $\vec{a}_{b2} = -\frac{g}{\sqrt{2}}[-1 \ 0 \ 1]^T$ | 5 | $\vec{a}_{b5} = \frac{g}{\sqrt{2}}[0 \ 1 \ 1]^T$ |
| 3 | $\vec{a}_{b3} = \frac{g}{\sqrt{2}}[1 \ 0 \ 1]^T$ | 6 | $\vec{a}_{b6} = -\frac{g}{\sqrt{2}}[0 \ 1 \ 1]^T$ |

將表 3 內六組體座標系加速度值代入(19a)、(19b)、(19c)式，獲得 2、3、5 號加速儀輸出值 P_{aj} ；其表示第 j 組加速度值對編號 i 加速儀產生輸出電子訊號，詳如

$$P_{a21} = SF_{a2}(T) \left[b_{a2}(T)T + \frac{g}{2}(\Delta\beta_{xz} - 2\Delta\beta_{xy})T \right]$$

$$P_{a22} = SF_{a2}(T) \left[b_{a2}(T)T - \frac{g}{2}(\Delta\beta_{xz} - 2\Delta\beta_{xy})T \right]$$

$$P_{a23} = SF_{a2}(T) \left[b_{a2}(T)T + \frac{g}{2}(2 + \Delta\beta_{xz})T \right]$$

$$P_{a24} = SF_{a2}(T) \left[b_{a2}(T)T - \frac{g}{2}(2 + \Delta\beta_{xz})T \right]$$

$$P_{a25} = SF_{a2}(T) \left[b_{a2}(T)T + \frac{g}{2}(1 + 2\Delta\beta_{xz} - \Delta\beta_{xy})T \right]$$

$$P_{a26} = SF_{a2}(T) \left[b_{a2}(T)T - \frac{g}{2}(1 + 2\Delta\beta_{xz} - \Delta\beta_{xy})T \right]$$

$$P_{a31} = SF_{a3}(T) \left[b_{a3}(T)T + \frac{g}{2}(1 + 2\Delta\beta_{yx})T \right]$$

$$P_{a32} = SF_{a3}(T) \left[b_{a3}(T)T - \frac{g}{2}(1 + 2\Delta\beta_{yx})T \right]$$

$$P_{a33} = SF_{a3}(T) \left[b_{a3}(T)T + \frac{g}{2}(1 - 2\Delta\beta_{yz})T \right]$$

$$P_{a34} = SF_{a3}(T) \left[b_{a3}(T)T - \frac{g}{2}(1 - 2\Delta\beta_{yz})T \right]$$

$$P_{a35} = SF_{a3}(T) \left[b_{a3}(T)T + \frac{g}{2}(2 - \Delta\beta_{yz} + \Delta\beta_{yx})T \right]$$

$$P_{a36} = SF_{a3}(T) \left[b_{a3}(T)T - \frac{g}{2}(2 - \Delta\beta_{yz} + \Delta\beta_{yx})T \right]$$

$$P_{a51} = SF_{a5}(T) \left[b_{a5}(T)T + \frac{g}{2}(2 - \Delta\beta_{zx})T \right]$$

$$P_{a52} = SF_{a5}(T) \left[b_{a5}(T)T - \frac{g}{2}(2 - \Delta\beta_{zx})T \right]$$

$$P_{a53} = SF_{a5}(T) \left[b_{a5}(T)T + \frac{g}{2}(2\Delta\beta_{zy} - \Delta\beta_{zx})T \right]$$

$$P_{a54} = SF_{a5}(T) \left[b_{a5}(T)T - \frac{g}{2}(2\Delta\beta_{zy} - \Delta\beta_{zx})T \right]$$

$$P_{a55} = SF_{a5}(T) \left[b_{a5}(T)T + \frac{g}{2}(1 + \Delta\beta_{zy} - 2\Delta\beta_{zx})T \right]$$

$$P_{a56} = SF_{a5}(T) \left[b_{a5}(T)T - \frac{g}{2}(1 + \Delta\beta_{zy} - 2\Delta\beta_{zx})T \right]$$

由上所列方程式可求得加速儀比例因子 SF_a 分別為：

$$SF_{a2}(T) = \frac{(P_{a21} - P_{a22}) + 3(P_{a23} - P_{a24}) - 2(P_{a25} - P_{a26})}{4gT} \quad (21a)$$

$$SF_{a3}(T) = \frac{-(P_{a31} - P_{a32}) - (P_{a33} - P_{a34}) + 2(P_{a35} - P_{a36})}{2gT} \quad (21b)$$

$$SF_{a5}(T) = \frac{3(P_{a51} - P_{a52}) + (P_{a53} - P_{a54}) - 2(P_{a55} - P_{a56})}{4gT} \quad (21c)$$

由比例因子代入前面十八組方程式，可表為一量測方程式

$$Z = Hx \quad (22)$$

$Z = [z_1 \ \cdots \ z_{18}]^T$ ；其中 Z 、 H 、 x 相關參數如下

$$z_1 = \frac{P_{a21}}{SF_{a2}T} ; z_2 = \frac{P_{a22}}{SF_{a2}T} ; z_3 = \frac{P_{a23}}{SF_{a2}T} - g ;$$

$$z_4 = \frac{P_{a24}}{SF_{a2}T} + g ; z_5 = \frac{P_{a25}}{SF_{a2}T} - \frac{g}{2} ; z_6 = \frac{P_{a26}}{SF_{a2}T} + \frac{g}{2} ;$$

$$z_7 = \frac{P_{a31}}{SF_{a3}T} - \frac{g}{2} ; z_8 = \frac{P_{a32}}{SF_{a3}T} + \frac{g}{2} ; z_9 = \frac{P_{a33}}{SF_{a3}T} - \frac{g}{2} ;$$

$$z_{10} = \frac{P_{a34}}{SF_{a3}T} + \frac{g}{2} ; z_{11} = \frac{P_{a35}}{SF_{a3}T} - g ; z_{12} = \frac{P_{a36}}{SF_{a3}T} + g ;$$

$$z_{13} = \frac{P_{a51}}{SF_{a5}T} - g ; z_{14} = \frac{P_{a52}}{SF_{a5}T} + g ; z_{15} = \frac{P_{a53}}{SF_{a5}T} ;$$

$$z_{16} = \frac{P_{a54}}{SF_{a5}T} ; z_{17} = \frac{P_{a55}}{SF_{a5}T} - \frac{g}{2} ; z_{18} = \frac{P_{a56}}{SF_{a5}T} + \frac{g}{2}$$

$$x = [b_{a2} \ b_{a3} \ b_{a5} \ \Delta\beta_{xy} \ \Delta\beta_{xz} \ \Delta\beta_{yx} \ \Delta\beta_{yz} \ \Delta\beta_{zx} \ \Delta\beta_{zy}]^T$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -g & \frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & g & -\frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & -\frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & \frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & g \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & -g \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & \frac{g}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & -\frac{g}{2} \end{bmatrix}$$

5.2 #1、#4、#6 加速儀量測方程式

由六組已知體座標系加速度，將產生十八組方程式以求得所需參數，令此六組體座標系加速度如表 4。

表 4. #1、#4、#6 加速儀方向誤差校準標準六組體座標系加速度。

| 組別 | 體座標系加速度 | 組別 | 體座標系加速度 |
|----|--|----|--|
| 1 | $\bar{a}_{b1} = \frac{g}{\sqrt{2}}[0 \quad -1 \quad 1]^T$ | 4 | $\bar{a}_{b4} = -\frac{g}{\sqrt{2}}[1 \quad 1 \quad 0]^T$ |
| 2 | $\bar{a}_{b2} = -\frac{g}{\sqrt{2}}[0 \quad -1 \quad 1]^T$ | 5 | $\bar{a}_{b5} = \frac{g}{\sqrt{2}}[-1 \quad 1 \quad 0]^T$ |
| 3 | $\bar{a}_{b3} = \frac{g}{\sqrt{2}}[1 \quad 1 \quad 0]^T$ | 6 | $\bar{a}_{b6} = -\frac{g}{\sqrt{2}}[-1 \quad 1 \quad 0]^T$ |

同上節步驟，將表 4 內六組體座標系加速度值代入(25a)、(25b)、(25c)式，可獲得 1、4、6 號加速儀共十八組訊號輸出方程式，詳如

$$P_{a11} = SF_{a1}(T) \left[b_{a1}(T)T + \frac{g}{2}(-1 + \Delta\alpha_{zy} + 2\Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a12} = SF_{a1}(T) \left[b_{a1}(T)T - \frac{g}{2}(-1 + \Delta\alpha_{zy} + 2\Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a13} = SF_{a1}(T) \left[b_{a1}(T)T + \frac{g}{2}(2 - \Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a14} = SF_{a1}(T) \left[b_{a1}(T)T - \frac{g}{2}(2 - \Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a15} = SF_{a1}(T) \left[b_{a1}(T)T - \frac{g}{2}(2\Delta\alpha_{zy} + \Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a16} = SF_{a1}(T) \left[b_{a1}(T)T + \frac{g}{2}(2\Delta\alpha_{zy} + \Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a41} = SF_{a4}(T) \left[b_{a4}(T)T + \frac{g}{2}(2 + \Delta\alpha_{yz} - \Delta\alpha_{yx})T \right]$$

$$P_{a42} = SF_{a4}(T) \left[b_{a4}(T)T - \frac{g}{2}(2 + \Delta\alpha_{yz} - \Delta\alpha_{yx})T \right]$$

$$P_{a43} = SF_{a4}(T) \left[b_{a4}(T)T - \frac{g}{2}(1 + 2\Delta\alpha_{yz})T \right]$$

$$P_{a44} = SF_{a4}(T) \left[b_{a4}(T)T + \frac{g}{2}(1 + 2\Delta\alpha_{yz})T \right]$$

$$P_{a45} = SF_{a4}(T) \left[b_{a4}(T)T + \frac{g}{2}(-1 + 2\Delta\alpha_{yx})T \right]$$

$$P_{a46} = SF_{a4}(T) \left[b_{a4}(T)T - \frac{g}{2}(-1 + 2\Delta\alpha_{yx})T \right]$$

$$P_{a61} = SF_{a6}(T) \left[b_{a6}(T)T - \frac{g}{2}(1 + \Delta\alpha_{zy} + 2\Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a62} = SF_{a6}(T) \left[b_{a6}(T)T + \frac{g}{2}(1 + \Delta\alpha_{zy} + 2\Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a63} = SF_{a6}(T) \left[b_{a6}(T)T + \frac{g}{2}(2\Delta\alpha_{zy} + \Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a64} = SF_{a6}(T) \left[b_{a6}(T)T - \frac{g}{2}(2\Delta\alpha_{zy} + \Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a65} = SF_{a6}(T) \left[b_{a6}(T)T + \frac{g}{2}(2 + \Delta\alpha_{zx})T \right]$$

$$P_{a66} = SF_{a6}(T) \left[b_{a6}(T)T - \frac{g}{2}(2 + \Delta\alpha_{zx})T \right]$$

由上所列方程式可求得加速儀比例因子 SF_a 分別為：

$$SF_{a1}(T) = \frac{2(P_{a11} - P_{a12}) + 3(P_{a13} - P_{a14}) + (P_{a15} - P_{a16})}{4gT} \quad (23a)$$

$$SF_{a4}(T) = \frac{2(P_{a41} - P_{a42}) + (P_{a43} - P_{a44}) + (P_{a45} - P_{a46})}{2gT} \quad (23b)$$

$$SF_{a6}(T) = \frac{2(P_{a61} - P_{a62}) + (P_{a63} - P_{a64}) + 3(P_{a65} - P_{a66})}{4gT} \quad (23c)$$

由比例因子代入前面十八組方程式，可表為(22)式之量測方程式 $Z = Hx$ ；其中 Z 、 H 、 x 相關參數如下

$$z_1 = \frac{P_{a11}}{SF_{a1}T} + \frac{g}{2} ; \quad z_2 = \frac{P_{a12}}{SF_{a1}T} - \frac{g}{2} ; \quad z_3 = \frac{P_{a13}}{SF_{a1}T} - g ;$$

$$z_4 = \frac{P_{a14}}{SF_{a1}T} + g ; \quad z_5 = \frac{P_{a15}}{SF_{a1}T} ; \quad z_6 = \frac{P_{a16}}{SF_{a1}T} ;$$

$$z_7 = \frac{P_{a41}}{SF_{a4}T} - g ; \quad z_8 = \frac{P_{a42}}{SF_{a4}T} + g ; \quad z_9 = \frac{P_{a43}}{SF_{a4}T} + \frac{g}{2} ;$$

$$z_{10} = \frac{P_{a44}}{SF_{a4}T} - \frac{g}{2} ; \quad z_{11} = \frac{P_{a45}}{SF_{a4}T} + \frac{g}{2} ;$$

$$z_{12} = \frac{P_{a61}}{SF_{a6}T} - \frac{g}{2} ; \quad z_{13} = \frac{P_{a62}}{SF_{a6}T} + \frac{g}{2} ;$$

$$z_{14} = \frac{P_{a62}}{SF_{a6}T} - \frac{g}{2} ; \quad z_{15} = \frac{P_{a63}}{SF_{a6}T} ; \quad z_{16} = \frac{P_{a64}}{SF_{a6}T} ;$$

$$z_{17} = \frac{P_{a65}}{SF_{a6}T} - g ; \quad z_{18} = \frac{P_{a66}}{SF_{a6}T} + g$$

$$x = [b_{a1} \quad b_{a4} \quad b_{a6} \quad \Delta\alpha_{xy} \quad \Delta\alpha_{xz} \quad \Delta\alpha_{yx} \quad \Delta\alpha_{yz} \quad \Delta\alpha_{zx} \quad \Delta\alpha_{zy}]^T$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -g & -\frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & g & \frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & \frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & -\frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & -\frac{g}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & \frac{g}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & g \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & -g \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

5.3 量測方程式參數估測值

本論文對十八個方程式，求解九個參數，運用最小平方誤差(Least Square Error)求解[16]，令 \hat{x} 為最佳估測參數，則功能指標函數為

$$J(\hat{x}) = [Z - H\hat{x}]^T [Z - H\hat{x}] \quad (24)$$

因為 \hat{x} 為最佳估測參數，故須滿足 $\frac{\partial J(\hat{x})}{\partial \hat{x}} = 0$ ，

故(29)式對 \hat{x} 微分得 $H^T Z - H^T H\hat{x} = 0$ 整理得最佳估測參數

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T Z \quad (25)$$

六、校準方法模擬驗證

本文提出六加速儀機制方向誤差校準方法，表5.列出本文所提校準方法與Chen's所提方法之比較，增加了位置解析與系統比例因子、原始偏差之調校，可提昇導航之精度。

表 5. 本文與 Chen 所提六加速儀機制校準方法比較。

| 差異項目 | Chen 之校準方法 | 本文校準方法 |
|------|-------------------------------|--|
| 方向誤差 | 每顆加速儀各有二方向誤差，需個別由實驗室中量測獲得。 | 區分兩組線性獨立加速儀，各組三顆加速儀理論與實際方向轉換矩陣與誤差角有關，由慣性導航系統整體實驗計算獲得各組誤差角。 |
| 位置誤差 | 須藉由實驗室旋轉平台，運用向心加速度結果計算獲得。 | 須藉由實驗室旋轉平台，個別作三軸旋轉，運用向心加速度結果計算獲得 |
| 比例因子 | 由出廠規格決定各加速儀比例因子，未考慮慣性導航系統整體。 | 由慣性導航系統整體實驗計算獲得各加速儀比例因子。 |
| 原始偏差 | 由出廠規格決定各加速儀原始偏差，並不考慮慣性導航系統整體。 | 由慣性導航系統整體實驗計算獲得各加速儀原始偏差。 |

為驗證前章(21)、(23)、(25)式校準方法正確性，特假設六加速儀機制無位置誤差情況下，一組六加速儀機制之各項誤差如表 6。

表 6. 六加速儀機制的安裝誤差角、加速儀的偏差量及比例因子。

| 加速儀編號 | 偏差量 | 比例因子 | 安裝誤差角 |
|-------|--------|------|---|
| 1 | 0.001g | 0.5 | $\Delta\alpha_{xy} = 0.6^\circ; \Delta\alpha_{xz} = 0.5^\circ;$ |
| 4 | 0.001g | 2.5 | $\Delta\alpha_{yx} = 0.8^\circ; \Delta\alpha_{yz} = 0.7^\circ;$ |
| 6 | 0.001g | 2.5 | $\Delta\alpha_{zx} = 0.4^\circ; \Delta\alpha_{zy} = 0.8^\circ$ |
| 2 | 0.001g | 2.5 | $\Delta\beta_{xy} = 0.6^\circ; \Delta\beta_{xz} = 0.5^\circ;$ |
| 3 | 0.001g | 0.5 | $\Delta\beta_{yx} = 0.8^\circ; \Delta\beta_{yz} = 0.7^\circ;$ |
| 5 | 0.001g | 2.5 | $\Delta\beta_{zx} = 0.4^\circ; \Delta\beta_{zy} = 0.8^\circ$ |

載具運動加速度： $\ddot{r}^i = [9.81 \ 0 \ 0]^T \text{ m/sec}^2$
 載具運動角加速度： $\dot{\omega}_{ib} = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ rad/sec}^2$
 載具運動初始角速度： $\vec{\omega}_{ib}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ rad/sec}$

經電腦模擬校準前六加速儀機制各加速儀輸出誤差如圖 5 所示。

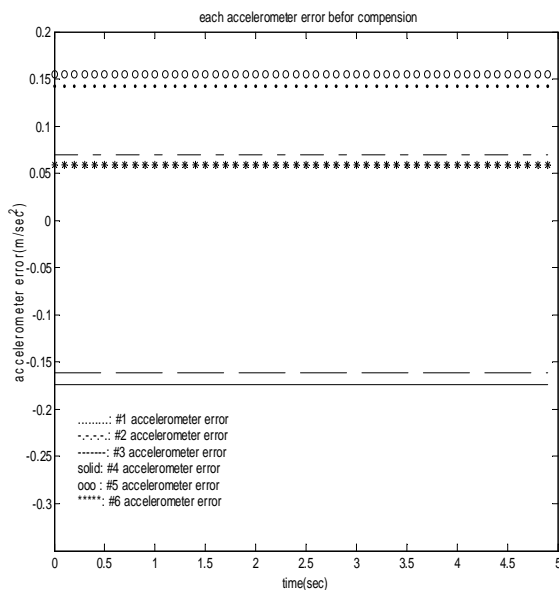


圖 5. 校準前六加速儀機制輸出誤差。
由圖 5 顯示校準前六加速儀機制輸出誤差約在 $1.5 \times 10^{-1} \text{ m/sec}^2$ 。

本文運用六加速儀校準方法，其流程如附圖 6，

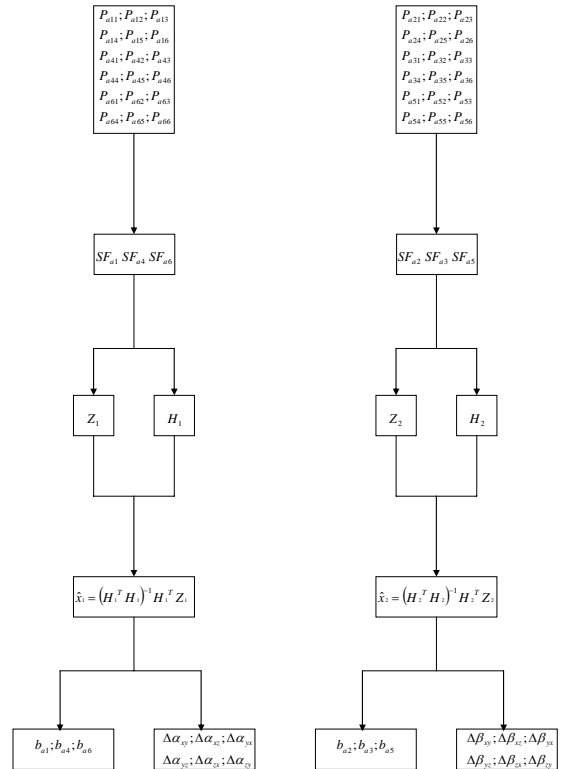


圖 6. 六加速儀機制校準流程圖。

由六加速儀機制校準，求得安裝誤差角、加速儀的偏差量及比例因子如表 7。

表 7. 運用六加速儀機制校準方法所求安裝誤差角、加速儀的偏差量及比例因子。

| 加速儀編號 | 偏差量 | 比例因子 | 安裝誤差角 |
|-------|--------|--------|--------------------------------------|
| 1 | 0.001g | 0.5 | $\Delta\alpha_{xy} = 0.5930^\circ$; |
| 4 | 0.001g | 2.4996 | $\Delta\alpha_{xz} = 0.5042^\circ$; |
| 6 | 0.001g | 2.4997 | $\Delta\alpha_{yx} = 0.8074^\circ$; |
| | | | $\Delta\alpha_{yz} = 0.7001^\circ$; |
| | | | $\Delta\alpha_{zx} = 0.4000^\circ$; |
| | | | $\Delta\alpha_{zy} = 0.8001^\circ$ |
| 2 | 0.001g | 2.4998 | $\Delta\beta_{xy} = 0.5930^\circ$; |
| 3 | 0.001g | 0.4999 | $\Delta\beta_{xz} = 0.5042^\circ$; |
| | | | $\Delta\beta_{yx} = 0.8074^\circ$; |
| 5 | 0.001g | 2.4997 | $\Delta\beta_{yz} = 0.7001^\circ$; |
| | | | $\Delta\beta_{zx} = 0.4000^\circ$; |
| | | | $\Delta\beta_{zy} = 0.8001^\circ$ |

經電腦程式模擬校準後六加速儀機制各加速儀輸出誤差如附圖 7

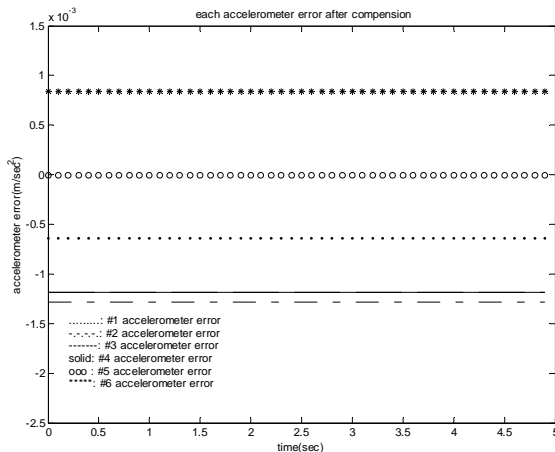


圖 7. 校準後六加速儀機制輸出誤差。

由圖 7 顯示校準後六加速儀機制輸出誤差約在 $1 \times 10^{-3} m/sec^2$ 。

六加速儀機制校準前、後所獲得輸出值，運用六加速儀機制理論求得載具 x 、 y 、 z 軸

角加速度誤差比較分別如附圖 8、9、10

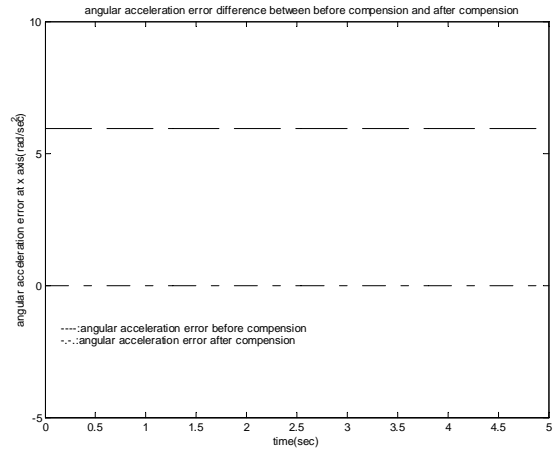


圖 8. 校準前、後載具 x 軸角加速度誤差比較。

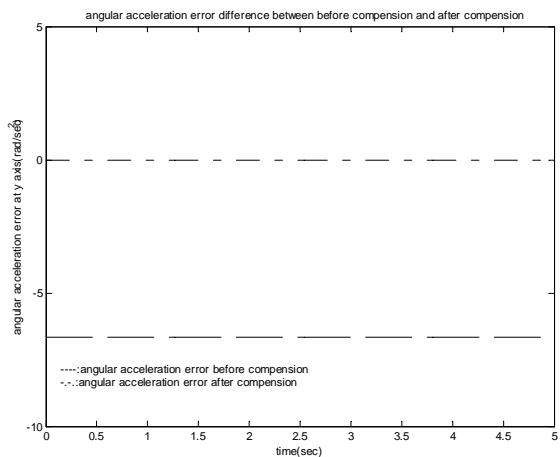


圖 9. 校準前、後載具 y 軸角加速度誤差比較。

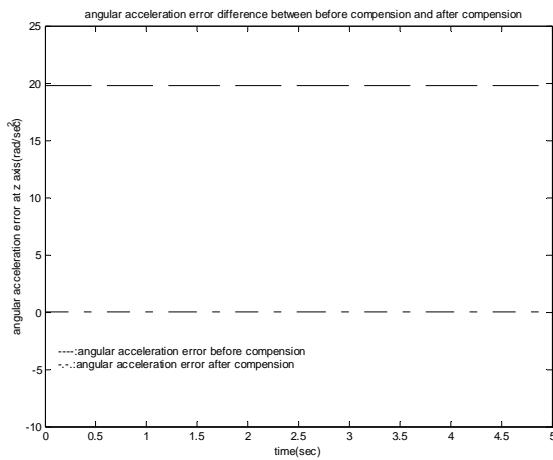


圖 10. 校準前、後載具 z 軸角加速度誤差比較。

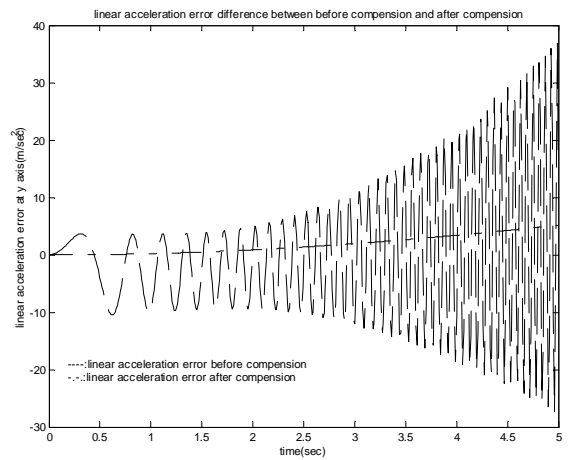


圖 12. 校準前、後載具 y 軸線性加速度誤差比較。

由圖 8、9、10 結果顯示校準前所計算載具角加速度誤差均大於 5 rad/sec^2 以上，但校準後角加速度誤差均近似於 0。

另六加速儀機制補償前、後所獲得輸出值運用六加速儀機制理論求得載具 x、y、z 軸線性加速度誤差比較分別如附圖 11、12、13。

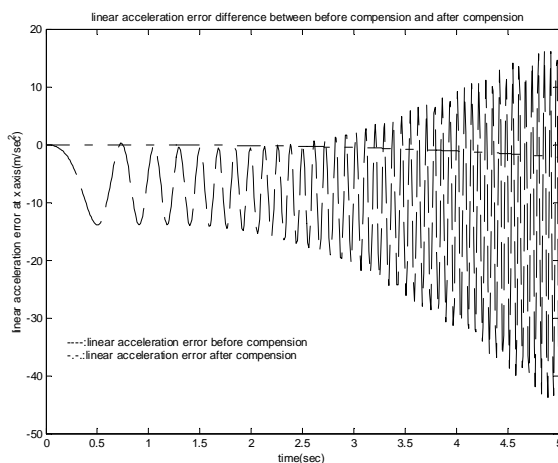


圖 11. 校準前、後載具 x 軸線性加速度誤差比較。



圖 13. 校準前、後載具 z 軸線性加速度誤差比較。

由圖 11、12、13 結果顯示第 5 秒時，校準前所計算載具加速度誤差顯示函數發散，且誤差均大於 35 m/sec^2 以上，但同時間校準後加速度誤差均收斂在零值附近。因此對於載具角加速度、線性加速度計算，校準後明顯改善誤差狀況。

七、結論

六加速儀機制理論係運用各加速儀相對於慣性座標加速度，計算載具之加速度及角加速度；因實際導航機制輸出值，係各加速儀承受之比力於感測方向投影量，故應補償重力之影響，以獲得各加速儀相對於慣性座標加速度。本文六加速儀機制理論補強重力場之研究，結合姿態方程式更能反映實際導航狀態，未來可結合硬品實作之軟體開發。

慣性導航精度與系統誤差有關，六加速儀導航系統主要誤差來源計有每顆加速儀原始偏差、比例因子，系統安裝時方向誤差及位置誤差，然而每顆加速儀出廠時規格並不等於系統規格，仍須以校準方法獲得。另運用六加速儀機制理論，模擬載具飛行加速度誤差結果，由模擬驗證結果知加速儀安裝的位置、方向誤差、加速儀的偏差量及比例因子等，將影響載具運動時加速儀輸出誤差量；然系統經校準補償後，則可減少加速儀輸出誤差量約二個級數，有效降低加速度誤差，提高導航精度。

本文校準方法係假設安裝的誤差角為小角度，因此忽略泰勒級數展開二次項以上，故對於計算載具姿態上仍有微小誤差，用以計算載具位置時，誤差將隨時間累積而增長。未來可應用六加速儀機制方向誤差校準結果，配合GPS執行狀態估測，利於爾後結合硬品實作，將可應用於無人飛行載具(UAV)、機器人(Robot)及開發自動駕駛控制系統，以達實用價值。

參考文獻

[1]Kenneth R. Britting, Sc. D., Inertial Navigation

System Analysis, Wiley-Interscience, New York, Chap 8, pp153-195, 1971.

[2]DiNapoli, L. D., "The Measurement of Angular Velocities Without the Use of Gyros," M. S. Thesis. The Moore School of Elec. Engineering University of Pennsylvania, Aug. 1965.

[3]Schuler, A. R., Grammatikos, A., and Fegler, K. A., "Measuring Rotational Motion with Linear Accelerometers," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-3 No. 3, pp. 465-471, May, 1967.

[4]Padgoankar, A. J., Krieger, K. W., King, . I., "Measurement of Angular Acceleration of a Rigid Body Using Linear Accelerometers," J. of Applied Mechanics, pp. 552-556, Sep. 1975.

[5]Mital, N. K., and King, A. I., "Computation of Rigid-Body Rotation in Three-Dimensional Space From Body-Fixed Linear Acceleration Measurement," Journal of Applied Mechanics, Transactions of American Society of Mechanical Engineers, Vol. 46, pp. 925-930, Dec. 1979

[6]Bulmash, G.; Loucks, R.; Muller, P.; Pearson, R., "Dynamics of The Nine Linear Accelerometer System for Measuring Blast Induced Target Displacements," Computers in Engineering, Proceedings of The International Computers in Engineering Conference and Exhibit, pp. 179-182, 1989.

[7]Algrain, Marcelo C.; Saniie, Jafar, "Estimation of 3-D Angular Motion Using Gyroscopes and Linear Accelerometers," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 27, No. 6, pp.910-920, Nov, 1991.

[8]Chen, J. H., Lee, S. C., and DeBra, D. B.,

- “Gyroscope Free Strapdown Inertial Measurement Unit by Six Liner Accelerometers,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics AIAA* Vol. 17, No.2, pp.286-290, March-April, 1994.
- [9]李守誠、劉正瑜、王亞民，“無陀螺儀固裝式慣性導航系統對初值問題之研究”，*中正嶺學報*第二十六卷第一期，頁 11-24，1997。
- [10]Kirill Semyonovich Mostov, “Design of Accelerometer-Base Gyro-Free Navigation System,” *Doctor of Philosophy in Engineering-Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley*, Chap. 5, pp. 178-225, 2000.
- [11]黃復聰，“加速規與全球定位系統整合方位估測法”，碩士論文，台灣大學應用力學研究所，台北，第三章，頁 37-69，2001。
- [12]Walter Wrigley, Walter M. Hollister, and William G. Denhard, Gyroscopic Theory, Design, and Instrumentation, The Massachusetts Institute of Technology Press, Chap. 12, pp. 241-242, 1969.
- [13]Broxmeyer, C., Eykhoff, P. E., Inertial Navigation System, McGraw-Hill, Inc., U.S.A., Chap. 1, p. 6, 1964.
- [14]Greenwood, D. T., Principles of Dynamics, 2nd Edition, Prentice Hall International Inc., U.S.A., Chap. 2, pp. 27-50, 1988.
- [15]Etkin, B., Dynamics of Atmospheric Flight, John Willy & Sons, Inc., U.S.A., Chap. 5, pp. 122-124, 1972.
- [16]Jerry M. Mendel, Lessons in Estimation Theory for Signal Processing, Communications, and Control, Prentice Hall International, Inc., U.S.A., Chap. 4, pp. 44-45 1995.