

CLOS 導引律用於 TVM 終端歸向之解析研究

趙嘉琦 李守誠* 宋真堯**

國防大學中正理工學院兵器系
*龍華科技大學資訊網路工程系
**中華技術學院電子工程系

摘要

本文討論 TVM(Tracking Via Missile)飛彈攔截彈道飛彈之解析研究，飛彈於終端階段使用視向線指令(Command to Line of Sight, CLOS)導引律，但 TVM 用 CLOS 導引律係屬於傳統 CLOS 導引律，比較其不同之處為參考點由地面控制站移往就位點，以及飛彈與目標速率比值(P)由 1.5 以上降為 0.7~0.5，且為迎頭交戰場景。文中將文獻上解析研究傳統 CLOS 之 Locke 法、Jalali-Naini 法與文氏法均重新修正，使之符合 TVM 飛彈攔截高速彈道飛彈的真實狀況。本研究並估算在假設條件下，最佳之就位點與就位角度之數值，達成最準確和最大能量之攔截撞擊。

關鍵詞：視向線指令(CLOS)，Locke 法，Jalali-Naini 法，文氏法。

The Analysis of CLOS Guidance Law in TVM Missile Terminal Interception

Chia-Chi Chao, Sou-Chen Lee, and Chen-Yaw Soong*

*Department of Weapon System Engineering, Chung Cheng Institute of Technology,
National Defense University*

**Department of Computer Information and Network Engineering
Lunghwa University of Science and Technology*

***Department of Electronic, China Institute of Technology and Commerce*

ABSTRACT

In this paper, it discuss the analytical method of ATBM interception via TVM (Tracking Via Missile), it use the modified CLOS(Command to Line of Sight) in the terminal phase. The major difference between conventional CLOS is observation (Reference) point, which is changed from the ground to seeker "lock-on" position in collision course. The second difference occur in the constant P, which is the ratio of speed of missile and target, the value is decreased from 1.5 to 0.7~0.5 and form as a head-on collision. It also give a rigorous study for some methods of CLOS, such as Locke method, Jalali-Naini method and Wen's method, to make some refining results. Under some assumption, the paper give a prediction for the best lock-on point, and the angle of lock-on, it can obtain a collision with the most accurate and the best energy consumption in the interception course.

Keywords: CLOS (Command to Line of Sight), Locke method, Jalali-Naini method, Wen's method.

一、前言

現行服役中的反飛彈系統由於採用了多功能相位陣列雷達，高速數位計算機，通過飛彈追蹤(Track Via Missile, TVM)複合導引技術，微電子技術和移動發射車等新技術，進而開創了現代戰爭史上用飛彈擊落飛彈的新開端。特別是 TVM 技術，這是一種新的導引方式，它利用彈上尋標器測出目標和飛彈的相對位置及姿態數據後傳送到地面控制中心，與相位陣列雷達測定的目標數據進行比對、處理，形成指令訊號再發送給飛彈，控制飛彈攔截目標。因此 TVM 歸向又稱為再傳遞歸向 (Retransmission Homing)，是一種混合指揮導引與半主動歸向導引特性的導引方式。TVM 導引之設計重點為動能攔截，做法是靠其彈頭或彈頭的破片以高速直接碰撞的方式摧毀來襲的高速目標[1-3]。

戰術彈道飛彈有其不同於其他目標的特點，這些特點對於反戰術彈道飛彈武器系統提出了特殊要求。戰術彈道飛彈的重要特點之一是其飛行時間短，所以對彈道飛彈的防禦當然是愈早偵知敵飛彈之發射愈有利，數百公里外飛彈發射之初，可用人造衛星偵察出飛彈推進劑燃燒的熱源，追蹤飛彈之平面軌跡，進而預測它以何處為攻擊目標，此為較能掌握先機的上策。而早期目標(指彈道飛彈)之獲得，衛星確可提供相當的幫助。如果沒有衛星，而能以早期預警雷達在足夠遠的距離外追蹤到彈道飛彈，同樣可執行攔截任務[4~7]。若能即時探測敵方飛彈發射，獲取必要的目標飛行彈道數據，並準確地測定發射點和落點數據，同時做出威脅分析且把相關數據傳送給防禦飛彈系

統，理論上可以引導防禦飛彈至估算的攔截點。滿足這一要求的關鍵是採用先進「全程複合導引控制技術」。通常攔截飛彈在初始階段採用慣性導引，中途階段加入指令修正，把攔截飛彈引導到預定的攔截空域，確保攔截飛彈的尋標頭能夠捕獲到目標訊號，以利在終端導引階段攔截飛彈使用 TVM 技術導引。TVM 終端導引技術之細節現尚未公開，但是一個成功的整合系統，每一分系統皆可遊刃有餘地發揮其所長，而不再突顯某一兩個分系統，而彼此互補，亦能避免彼此過度設計(Over-Designed)[8]。基於此想法，發展 TVM 導引技術即偏向使用服役中已成熟的導引律，故傳統導引律脫穎而出，又因其配賦之感測器較少，架構較簡易，強健性較高，總體工程實踐(Implementations)亦較容易均為其優點[9-10]。對戰術彈道導彈進行攔截必須盡可能在較高的空域及較遠的距離，攔截時最好能直接命中，藉動能徹底摧毀目標。反戰術彈道導彈飛彈的飛行速率遠不及目標速率，故其攔截之幾何運動關係必須儘量安排成迎頭(Head On)的軌跡，目標對反戰術彈道導彈飛彈的呈現面小，故導引的精度要夠準確，方易於直接命中。在研究 TVM 飛彈使用之導引律過程中，首先藉模式模擬進行連串之實驗，可說是以較為容易建立之方式瞭解導引律是否可行。經上述一連串實驗後，改良之 CLOS 被認為在某些條件下可攔截彈道飛彈[11-15]。但是進一步以理論分析相關問題，則仍多採用純數學模式。文獻中最常用來分析 CLOS 問題的是 Locke 解法，其法為此領域中人士所熟悉，採用冪級數法解微分方程，在解決傳統 CLOS 問題上均可迎刃而解。但是否適用於改良之 CLOS 問題則須再推研。另 Jalal-Naini 法僅有理論證

明，尚無模擬應用與驗證，是否亦適用於改良之 CLOS 問題則亦須再評估。此外大陸學者研究 CLOS 問題採用之方法也於本論文中一併討論，用以收集思廣益之效。

二、TVM 尋標原理與模擬研究之回顧

在傳統的 CLOS 導引狀況下，飛彈

(M)、目標(T)、與控制站(O)的幾何關係如圖 1.所示。 R_M 為控制站至飛彈的距離， R_T 為控制站到目標的距離。 Δx 為飛彈距 \overline{OT} 的垂直距離。傳統的視線指令導引是由控制站量出 θ_T 及 θ_M 的角度差。配合控制站所量得的 \overline{OM} (即 R_M)，假設有良好中途導引配合之前提下，將 CLOS 用於終端攔截，此時 \overline{OM} 與 \overline{OT} 皆很大且接近中，相較

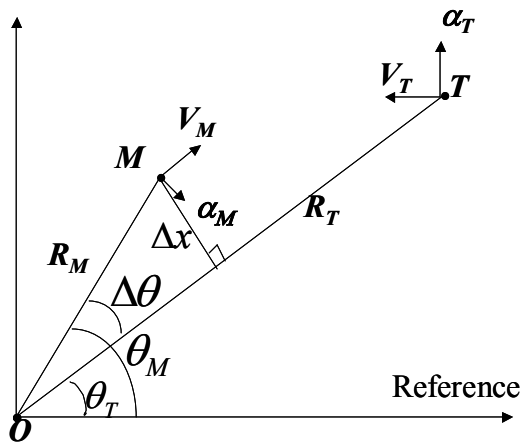


圖 1. 傳統 CLOS 之接戰幾何。

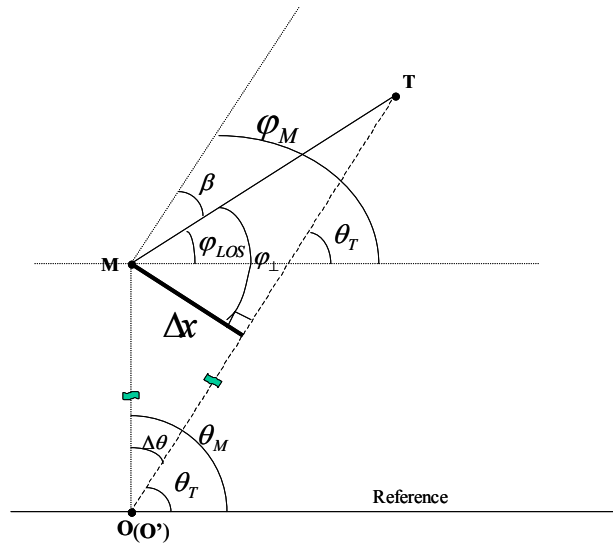


圖 2. TVM 改良式 CLOS 之接戰幾何。

之下 \overline{MT} 變得很小, Δx 在導引迴路控制下也逐漸縮小, 並使 $\Delta\theta = \theta_M - \theta_T$ 變得很小, 此時合理假設適用小角度理論, 則可求得 Δx 即 $(R_M \cdot \Delta\theta)$ 。利用 Δx 經過導引率, 產生命令至攔截者的側向加速度自動駕駛儀, 產生側向加速度 a_M (垂直於攔截者速度 V_M)。

傳統的 CLOS 導引, 由於控制站同時追蹤飛彈與目標, 當兩者的距離變遠時, $\Delta\theta$ 角的誤差值也會變大, (由於回跡信號太弱, 在自動增益控制迴路中放大了雜訊所致)。再加上 \overline{OM} 變大, Δx 之誤差也隨之變大, 遠距離時導引精度並不理想, 要想直接命中具有閃躲能力的目標更是力有未逮。所以參考文獻[11-15]中提出改良式視線指令導引, 在飛彈上加裝尋標器。此尋標器是用來產生精確的 Δx , 而不是直接用來做歸向導引。其幾何關係如圖 2。圖中, 設 O 點為地面雷達, 可同時追蹤到反戰術彈道導彈飛彈(M)及目標(T)。故在任何時間 \overline{OM} (飛彈距離), \overline{OT} (目標距離), 及 θ_M, θ_T 均為已知, 故 $\overline{MT}, \dot{\overline{MT}}, \varphi$ 及 $\dot{\varphi}$ 等物理量均可於地面控制站內計算出來, 飛彈上的尋標器可以偵測出彈軸與視向線間之角度差 β 。 Δx 之獲得可由尋標頭的 β 角及 IRU 所提供之 φ_M , 再加上 θ_T 導出 φ_{\perp} 後而得, 如(1)式:

$$\varphi_{\perp} = \varphi_M - \beta + (90^{\circ} - \theta_T) \quad (1)$$

$$\Delta x = \overline{MT} \cos \varphi_{\perp} = \overline{MT} \sin(90^{\circ} - \varphi_{\perp}) \quad (2)$$

而傳統的視線指令導引, 其 Δx 的獲取是依下式而得:

$$\Delta x = \overline{OM}(\theta_M - \theta_T) \quad (3)$$

理論上兩者所獲得之 Δx 應相同, 唯對各物理量之量度均有其誤差存在, 故對 Δx 之精度均會造成若干程度之影響。影響 φ_{\perp} 的因素是 φ_M, β 及 θ_T 之量度, φ_M 是彈軸向相對於參考基準的夾角, 由彈上 IRU 所提供。 Δx 的精度, 也就是誤差量, 可從(2)式微分

得知:

$$d(\Delta x) = d(\overline{MT}) \cos \varphi_{\perp} + (\overline{MT}) (-\sin \varphi_{\perp}) \cdot d\varphi_{\perp} \quad (4)$$

因為一般 Δx 遠比 \overline{MT} 要小很多, 故當 Δx 為小值時, φ_{\perp} 接近 90 度, 則得:

$$\Delta(\Delta x) = -\overline{MT} \cdot \Delta \varphi_{\perp} \quad (5)$$

由(5)式可知假若 $\Delta \varphi_{\perp}$ 為一固定的小量, 則 Δx 的誤差量會隨 \overline{MT} 的變小而減小。換言之, 當飛彈越來越接近目標時, Δx 將越來越精確。亦即改良式視線指令導引系統的精度會越來越高。與傳統的視線指令導引, 的精度會隨著飛彈越遠而越差, 兩相比較可顯示改良式視向線導引所具備之優越性。改良式視線指令導引的控制站 O 點的位置, 可以是虛擬的。圖 2 所示的 O 點可以不是真實的控制站所在的位置。如此設計的理由是因為目標可能來自於任何方位, 而飛彈限於飛行速率低於目標許多, 必須迎頭攔截, 故其配合執行改良式視線指令導引的 O 點, 幾乎必須落在目標的彈道延長線上。關於這一點因為地面控制站有精良的計算機, 可以把量測到的各種距離及角度數據, 換算到相對於此虛擬的 O' 點, 這 O' 點通常指終端攔截就位點。綜上知, 改良式 CLOS 系統藉由就近在 O' 點觀測 Δx 及不斷地回授控制使得 $\Delta x = 0$ 。

此將使得在終端階段保持

$$\theta_M = \theta_T \text{ 且}$$

$$\dot{\theta}_{LOS} = \dot{\theta}_M = \dot{\theta}_T$$

故得:

$$\dot{\theta}_{LOS} = \frac{V_{\alpha M}}{R_M} = \frac{V_{\alpha T}}{R_T} \quad (6)$$

$$V_{\alpha M} = \frac{R_M}{R_T} V_{\alpha T} = \frac{R_M}{R_{TM} + R_M} V_{\alpha T} \quad (7)$$

$V_{\alpha M}$ 為飛彈之側向速度, $V_{\alpha T}$ 為目標之側向速度。如此即可以增加執行導引的彈性, 更

可以縮短攔截時間[17]。

雖然文獻[11-15]已用模擬方法研究 CLOS 導引律用於 TVM 飛彈之問題，但其必須一步接一步(Step by step)的計算出數值解，故比較適合個別場景研究。工程科學解決問題時通常採用「把分散系統(Distributed system)簡化為集中系統(Lumped system)」與「把非線性問題簡化為線性問題」兩手段來討論，簡化問題之要求為容易求解及不失真，其目的就在對工程問題有一全面之瞭解。故研究視向線導引律問題亦可將其簡化求解解析解，此解析解為一近似解，用來窺視問題全貌，比較適合定性研究[16]。視向線導引由前述模擬架構知，設計者一直試圖運用彈載尋標器獲得資料並以控制理論設計閉迴路使 $\theta_M = \theta_T$ ， Δx 與 φ_{\perp} 之計算愈來愈精確；即控制站至目標之視向線儘量與控制站至飛彈之視向線重疊，亦即操控飛彈總在沿控制站至目標方向飛行，終至撞擊。在設計

反彈道飛彈導引律時，遭遇的困難是目標速度較飛彈高出許多，比較可行之設計為逆彈道設計策略(Counter attack strategy)[17]。基於此假設可為設計此型飛彈最基本之依據，其中途導引階段能引導飛彈鑽入目標軌跡中，形成迎頭狀態。於想定狀況中假定目標皆由西方上空重返地面，並合理假設地表為平面。圖 3.說明逆彈道接戰之情形，在就位點 O_M (Lock-on point)時飛彈軌跡與目標軌跡成為一方向相反之平行線，其距離為 ΔX 。視向線與 ΔX 之夾角為 φ_{\perp} ，將參考點變換至 O_M 可獲得新座標 $\angle X_M O_M Z_M$ 因而發展出解析解，期能瞭解飛彈擊靶軌跡與 ΔX 、 φ_{\perp} 、 t 等之關連，由此關連中分析飛彈側向加速度主要影響因素、側向加速度在各時期之大小趨勢、與確保飛彈在擊靶時仍有足夠撞擊速度等問題，以探討最有利之就位條件。

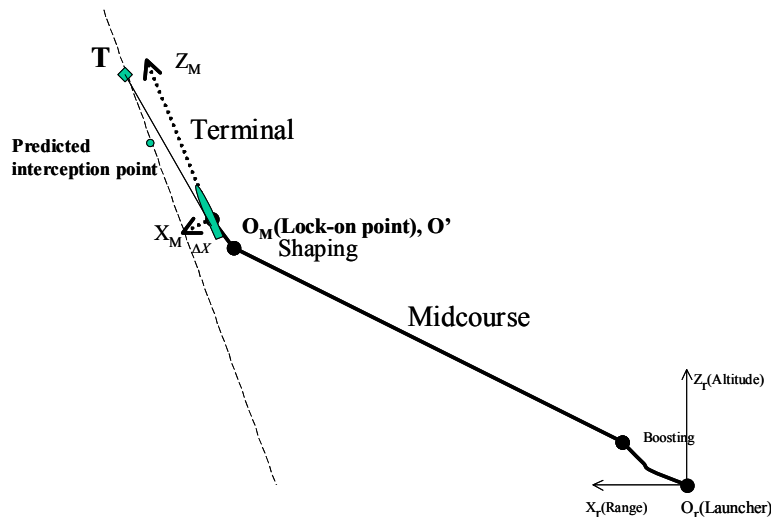


圖 3.逆彈道攔截之接戰幾何。

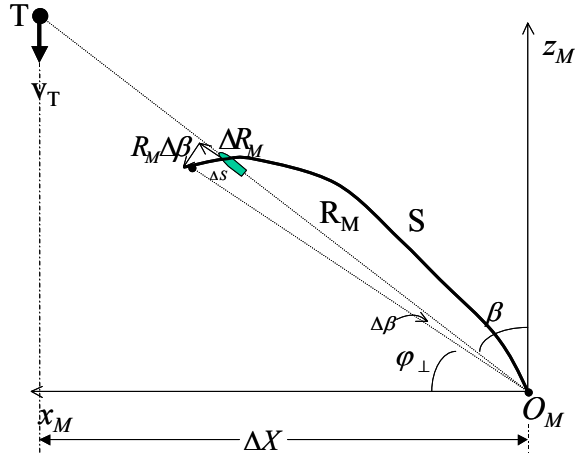


圖 4. 仿 Locke 解法中之接戰幾何。

三、修正 Locke 法的解析解法

在 CLOS 研究中，最著名之解析解法係由美國海軍實驗室 Locke 等所發展 [18-19]，原目的係供乘波導引攔截平飛無逃逸目標之用。此處將仿其解法以作為視向線導引攔截重返載具之用。圖 4. 即為仿 Locke 解法之接戰幾何關係圖。圖 4. 中各符號所代表之意義如下： S ：軌跡弧線之長度。 $\beta = \pi/2 - \varphi_{\perp}$ 。 V_M ：飛彈速度。 V_T ：目標速度。定義符號 $m = \tan \beta$ 。此處方程式之表示，均在下列 4 項假設條件下進行。

- (1) 目標以垂直直線方式落下。
- (2) 飛彈及目標皆為等速飛行，唯速度各不相同。
- (3) 初始就位點為一固定之參考點。
- (4) 採用 2 維直角座標。

由圖 4. 可得下式：

$$(\Delta s)^2 = (\Delta R_M)^2 + R_M^2 (\Delta \beta)^2 \quad (8)$$

經對 β 微分，觀其變量可得：

$$(dR_M/d\beta)^2 + R_M^2 = (ds/d\beta)^2 \quad (9)$$

經時間 t 後，對目標移動之距離可表為：

$$V_T t = \Delta X \cot \beta_0 - \Delta X \cot \beta \quad (\text{參考圖 4}) \quad (10)$$

當 $t = 0$ 時，目標視向線與垂直之夾角為 β_0 ，微分(10)式可得：

$$V_T (dt/d\beta) = \Delta X \csc^2 \beta \quad (11)$$

另因，

$$V_M = ds/dt \quad (12)$$

整理(11)、(12)式可獲得軌跡弧長對 β 角度之變化：

$$ds/d\beta = (ds/dt)(dt/d\beta) = V_M (\Delta X / V_T) \csc^2 \beta \quad (13)$$

將(13)式代入(9)式可得：

$$(dR_M/d\beta)^2 + R_M^2 = (V_M/V_T)^2 \Delta X^2 \csc^4 \beta \quad (14)$$

定義飛彈與目標速度比：

$$p = V_M/V_T$$

則 $k = p \Delta X$

改寫(14)式如下：

$$(dR_M/d\beta)^2 + R_M^2 = k^2 \csc^4 \beta \quad (15)$$

(15)式為一非線性微分方程式以泰勒(Taylor)級數展開求解 R_M ：

四、修正 Jalali-Naini 法的解析解法

在 CLOS 研究中，另有極座標封閉解法係由 Jalali-Naini 與 V. Esfahanian[20]所發展，供解算平飛無逃逸目標之用。現將接戰就位幾何於圖 5.中以極座標(R_M, β)重新表示：

已知在極座標中任一點質量 P 之速度及加速度可由下二式表示：

$$V_P = \dot{R}_M e_{R_M} + R_M \dot{\beta} e_{\beta} \quad (29)$$

$$a_P = (\ddot{R}_M - R_M \dot{\beta}^2) e_{R_M} + (R_M \ddot{\beta} + 2\dot{R}_M \dot{\beta}) e_{\beta} \quad (30)$$

e_{R_M} 與 e_{β} 均為單位向量，另假設模擬架構中控制迴路功能設計良好，皆可使

$\theta_M = \theta_T$ ，此處飛彈所需之側向加速度僅為縮短其與目標在垂直視向線方向之距離(Δx)，亦即一直藉著導引迴路達成 $\Delta x = 0$ ，此可使飛彈一直控制在控制點至目標之視向線上。故在計算飛彈加速度命令時，可再將其分為平行視向線方向之加速度與垂直視向線方向之加速度。基於滿足前述需求，垂直視向線方向之加速度等於飛彈

加速度命令，而平行視向線方向之加速度為 0。故依此假設下：

$$a_M = R_M \ddot{\beta} + 2\dot{R}_M \dot{\beta} \quad (31)$$

$$\theta_T(t) = \theta_M(t) \quad (32)$$

a_M 方向垂直於視向線。由圖 5.知：

$$R_T = \Delta X / \sin \beta \quad (33)$$

$$\cot \beta = \cot \beta_0 - (V_T / \Delta X)t \quad (34)$$

$$\dot{\beta} = \frac{V_T}{\Delta X} \sin^2 \beta \quad (35)$$

$$\ddot{\beta} = 2 \frac{V_T^2}{\Delta X^2} \sin^3 \beta \cos \beta \quad (36)$$

假設氣動力、自動駕駛儀設計良好，飛彈攔截目標之加速度均可有效提供，則由(31)式可得：

$$\ddot{R}_M - R_M \dot{\beta}^2 = 0 \quad (37)$$

吾人知：

$$\dot{R}_M = \dot{\beta} \frac{dR_M}{d\beta} \quad (38)$$

$$\ddot{R}_M = \ddot{\beta} \frac{dR_M}{d\beta} + \dot{\beta}^2 \frac{d^2 R_M}{d\beta^2} \quad (39)$$

將(39)式代入(37)式可得：

$$\ddot{\beta} \frac{dR_M}{d\beta} + \dot{\beta}^2 \left(\frac{d^2 R_M}{d\beta^2} - R_M \right) = 0 \quad (40)$$

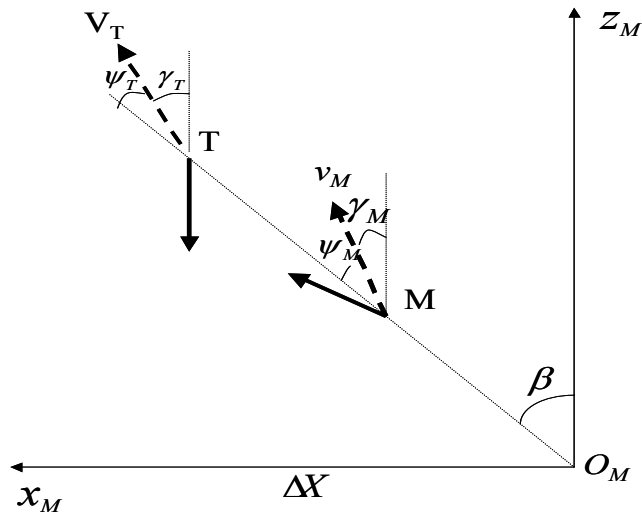


圖 6. 仿文氏解法之接戰幾何。

$\dot{\beta}$ 與 $\ddot{\beta}$ 分別由(35)、(36)式代換後，(40)式可化簡為：

$$\frac{d^2 R_M}{d\beta^2} + 2 \cot \beta \frac{dR_M}{d\beta} - R_M = 0 \quad (41)$$

繼而令 $u = R_M \sin \beta$ ，(41)式可化簡為：

$$(1/\sin \beta)(d^2 u/d\beta^2) = 0 \quad (42)$$

求解得(41)式：

$$u = A_1 \beta + A_2 \quad (43)$$

$$R_M = (A_1 \beta + A_2) / \sin \beta, \beta_0 \neq 0, \pi; A_1, A_2 \text{ 為積分常數。} \quad (44)$$

再由圖 5. 中對速度分量可表為：

$$V_M \sin \psi = R_M \dot{\beta} \quad (45)$$

$$V_M \cos \psi = \dot{R}_M \quad (46)$$

定義視向線導引起始於參考點 O_M ，其

$R_{M0} = 0$ ，代入(48)、(49)式，設 $\psi_0 = 0$

並令 $\dot{R}_{M0} \equiv \dot{R}_M(0) = V_M(0) \equiv V_{M0} = V_M$ ，

比較係數可解得：

$$R_M = \frac{\Delta X V_{M0}}{V_T \sin \beta_0} \frac{\beta - \beta_0}{\sin \beta} \quad \text{對 } \beta_0 \neq 0, \pi \quad (47)$$

將(47)式微分得：

$$\dot{R}_M = \frac{V_{M0}}{\sin \beta_0} [\sin \beta - (\beta - \beta_0) \cos \beta] \quad (48)$$

將式(35)、(36)、(47)、(48)代入(31)式整理後，

$$a_M = \frac{2V_{M0}V_T}{\Delta X \sin \beta_0} \sin^3 \beta \quad (49)$$

將(45)式除以(46)式得：

$$\cot \psi = (1/R_M)(dR_M/d\beta) \quad (50)$$

將(47)式與(47)式對 β 之微分

代入(50)式得：

$$\tan \psi = (\beta - \beta_0) / [1 - (\beta - \beta_0) \cot \beta] \quad (51)$$

將(45)式平方與(46)式平方相加後，

以(35)、(47)及(48)代入整理得：

$$V_M^2 = (V_{M0}^2 / \sin^2 \beta_0) [(\beta - \beta_0)^2 + \sin^2 \beta - (\beta - \beta_0) \sin 2\beta] \quad (52)$$

飛彈擊中目標時， $R_T = R_M$ ，

故可令(33)與(47)二式相等後得：

$$\beta_f = \beta_0 + \frac{V_T \sin \beta_0}{V_{M0}} \quad (53)$$

理論上，飛彈能夠擊中目標則 $R_M > R_T$ ，

故由(33)及(47)式知：

$$\frac{\Delta X V_{M0}}{V_T \sin \beta_0} \frac{\beta - \beta_0}{\sin \beta} \geq \frac{\Delta X}{\sin \beta} \quad (54)$$

將(54)式重新整理，

並將擊靶條件 $\beta = \pi$ 代入得：

$$\frac{V_{M0}}{V_T} \geq \frac{\sin \beta_0}{\pi - \beta_0} \quad \beta_0 \neq 0, \pi \quad (55)$$

對飛彈側向速度可經下式獲得：

$$V_{\alpha M} = \int_{t_0}^{t_{go}} |a_M| dt \quad (56)$$

又將(49)式代入(56)式，經計算後可得：

$$V_{\alpha M} = (2V_{M0} / \sin \beta_0) (\cos \beta_0 - \cos \beta_f) \quad (57)$$

五、修正文氏法之解析解法

在 CLOS 研究中，學者文仲輝[21]曾以歸向導引常用之動力學方法對三點導引側向加速度問題提出分析，本文亦採用此一動力學方法對 CLOS 用於 TVM 導引時之側向加速度命令作一解析分析。歸向導引時之基本假設為視向線長度變化，係平行視向線速度分量之作用，視向線角度旋轉係垂直視向線速度分量之作用。此處之交戰幾何可表示如圖 6。

由圖 6. 知對飛彈而言：

$$\frac{dR_M}{dt} = V_M \cos(\beta - \gamma_M) \quad (58)$$

$$R_M \frac{d\beta}{dt} = -V_M \sin(\beta - \gamma_M) \quad (59)$$

對目標而言：

$$\frac{dR_T}{dt} = V_T \cos(\beta - \gamma_T) \quad (60)$$

$$R_T \frac{d\beta}{dt} = -V_T \sin(\beta - \gamma_T) \quad (61)$$

對(59)式微分，可得：

$$\frac{dR_M}{dt} \frac{d\beta}{dt} + R_M \frac{d^2\beta}{dt^2} = -V_M \cos(\beta - \gamma_M) \left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{d\gamma_M}{dt} \right) - \frac{dV_M}{dt} \sin(\beta - \gamma_M) \quad (62)$$

將(58)式及(59)式代入(62)式整理後得：

$$\frac{d\gamma_M}{dt} = 2 \frac{d\beta}{dt} + \frac{R_M}{dR_M/dt} \left(\frac{d^2\beta}{dt^2} - \frac{1}{V_M} \frac{dV_M}{dt} \frac{d\beta}{dt} \right) \quad (63)$$

(63)式即是飛彈彈道軌跡角度的變化率。

再由(61)式可推導出下式：

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{1}{R_T^2} \left[\begin{array}{l} 2V_T^2 \cos(\beta - \gamma_T) \sin(\beta - \gamma_T) + \\ R_T \cos(\beta - \gamma_T) V_T \frac{d\gamma_T}{dt} - \\ R_T \sin(\beta - \gamma_T) \frac{dV_T}{dt} \end{array} \right] \quad (64)$$

令 $a_{NT} = V_T \frac{d\gamma_T}{dt}$ ，表示目標運動之側向加速度。

$$a_{NM} = V_M \frac{d\gamma_M}{dt}，表示飛彈運動之側向加速度。 \quad (65)$$

將(63)、(64)式代入(65)式得：

$$a_{NM} = \frac{R_M}{R_T} \left[\begin{array}{l} \frac{V_T \sin(\gamma_T - \beta)}{\cos(\gamma_M - \beta)} \times \\ \left(\frac{2V_M \cos(\gamma_M - \beta)}{R_M} - \frac{2V_T \cos(\gamma_T - \beta)}{R_T} \right) + \\ \left(\frac{1}{V_T} \frac{dV_T}{dt} - \frac{1}{V_M} \frac{dV_M}{dt} \right) \\ a_{NT} \frac{\cos(\beta - \gamma_T)}{\cos(\beta - \gamma_M)} \end{array} \right] + \quad (66)$$

現討論將目標改設為方向向下之等速目標，則：

$$\gamma_T = \pi$$

$$\sin(\gamma_T - \beta) = \sin \beta$$

(66)式可化簡得：

$$a_{NM} = \frac{2V_M V_T \sin \beta}{R_T} \left[1 + \frac{R_M V_T \cos \beta}{V_M R_T \cos(\gamma_M - \beta)} \right] \quad (67)$$

因 $R_T = \frac{\Delta X}{\sin \beta}$ ，故(61)式化簡為：

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{V_T}{R_T} \sin(\gamma_T - \beta) = \frac{V_T}{\Delta X} \sin^2 \beta \quad (68)$$

與

$$\cos(\gamma_M - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\gamma_M - \beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_M}{R_M} \frac{d\beta}{dt} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_T}{\Delta X} \frac{R_M}{V_M} \sin^2 \beta \right)^2} \quad (69)$$

將(69)式代入(67)式，化簡之：

$$a_{NM} = \frac{2V_M V_T \sin^2 \beta}{\Delta X} \left(1 + \frac{\cos \beta}{\sqrt{p^2 - \sin^2 \beta}} \right) \quad (70)$$

上式即為飛彈擊靶所需之側向加速度。

六、模擬法與解析法的比較分析與討論

6.1 修正 Locke 方法之分析

Jerger[22]使用 Locke 所提出之方法分析視向線導引攔截平飛目標之飛彈軌跡，但 Jerger 與 Locke 均將 ΔX 標準化(Normalize)為 1。若使 $k = p$ ，(15)式可改寫為：

$$(dR_M/d\beta)^2 + R_M^2 = p^2 \csc^4 \beta \quad (71)$$

(71)式可再寫為：

$$(dR_M/d\beta)^2 = p^2 \csc^4 \beta - R_M^2 \quad (72)$$

(72)式於 $p^2 \csc^4 \beta - R_M^2 > 0$ 時方合理成立，故知：

$$p^2 (R_M/\Delta X)^4 - R_M^4 > 0 \quad (73)$$

(73)式化簡得：

$$p > \Delta X^2 \quad (74)$$

$\Delta X = 1$ ，得 $p > 1$ 。

故知 Locke 與 Jerger 等將 p 設為一大於 1.5 之常數，在一般飛彈速度較目標速度為

快且無小角度入射之條件下，給定 ΔX 、 β_0 則可利用(23)式將 R_M 變為 β 之函數，由 β 可輕易求出 R_M 。但研究攔截彈道飛彈時， $p = V_M/V_T$ 之值大約在 0.5 ~ 0.8，所以知 Locke 與 Jerger 等近似解之作法由於非封閉解，在此難以適用，符合 Macfadzean 之論點[23]。在程式計算中亦證明 Locke 法不適用於 $p < 1$ 之條件。

6.2 修正 Jalali-Naini 法之分析

1、飛彈之軌跡

Jalali-Naini 等的封閉解法則符合 $p < 1$ 之條件，將 $p = V_M/V_T$ 代入(47)式，得：

$$R_M = \frac{p\Delta X}{\sin \beta_0} \frac{\beta - \beta_0}{\sin \beta} \quad (75)$$

由(75)式可先瞭解攔截軌跡在給定 p 、 β_0 時， R_M 與 β 之關係。現可將(75)式寫成程式，並設定軌跡在 X_M 方向與 ΔX 極接近時，停止計算，此為 Locke 與參考資料[11-15]之相同概念，即飛彈與目標同在 Z_M 軸上，飛彈雖然速度較慢，但能先就位則亦能迎頭撞擊。在本研究中假設 $V_M=1500m/s$ ， $V_T=2400m/s$ 。現比較三種場景，場景 1(Case 1)就位點與目標較接近， β_0 為 5° 、 $\Delta X=2000m$ 。場景 2(Case 2)就位點與目標次接近， β_0 為 10° 、 $\Delta X=4000m$ 。場景 3(Case 3)就位點與目標較遠離， β_0 為 15° 、 $\Delta X=6000m$ 。圖 7.表示此三種場景之模擬軌跡與解析解軌跡比較。由圖 7.比較知場景 1(Case 1)就位點與目標距離近時，解析法預先解算之軌跡與模擬結果極為接近，兩軌跡相距最遠在 20 m 以內。場景 3(Case 3)就位點與目標較遠時，其前期軌跡猶能與模擬軌跡接近， ΔX 小於 2000 m 時，兩軌跡相距最遠亦在 20 m 以內，後期軌跡則稍有偏差， ΔX 於 6000 m 時，兩軌跡相距最遠達 1000 m。

整體而言，(75)式可為 CLOS 用於 TVM 導引軌跡之數學描述，分析後也證明飛彈之軌跡主要受就位時之 p 、 ΔX 、 β_0 相關項之影響。

2. 飛彈之側向加速度命令

導引律經快速計算後形成導引命令，導引命令一般以側向加速度命令方式交由自動駕駛儀來執行。過高之側向加速度因飛彈硬體無法負荷，故自動駕駛儀內設有限制裝置。此限制裝置僅執行彈體系統所能容忍之側向加速度，致使導引命令產生飽和現象。因此側向加速度命令之數值是一個值得觀察的指標，將(49)式寫成程式是 Jalali-Naini 法求取側向加速度命令之做法。將前三場景中之側向加速度命令數值分別以模擬法與 Jalali-Naini 法繪出如圖 8.，在圖 8.中知就位點近時(Case1)以 Jalali-Naini 法計算出之側向加速度命令最接近模擬值，相差最大時為 10 個 G 值。就位點遠時(Case3)以 Jalali-Naini 法計算出之側向加速度命令與模擬值有差距，相差最大時為 60 個 G 值。

3. 飛彈在後期之能量

TVM 導引律導引之動能攔截飛彈是靠其彈頭或彈頭的破片以高速直接碰撞的方式摧毀來襲的高速目標，如何確保飛彈在後期仍有足夠之能量亦為導引律設計之重點。在此用 V_M^2 為指標，(52)式為完全執行 CLOS 命令所得出之飛彈速率平方，(51)式可得軌跡角度 ψ ，後可得在視向線方向之能量指標，將其寫成程式與模擬法比較如圖 9.。由圖 9. 知 Jalali-Naini 法假設飛彈可完全執行 CLOS 命令加速攔截目標，與實際上飛彈末期僅有殘餘動能之狀況不合，故 Jalali-Naini 法得出之數值於後期不準確。

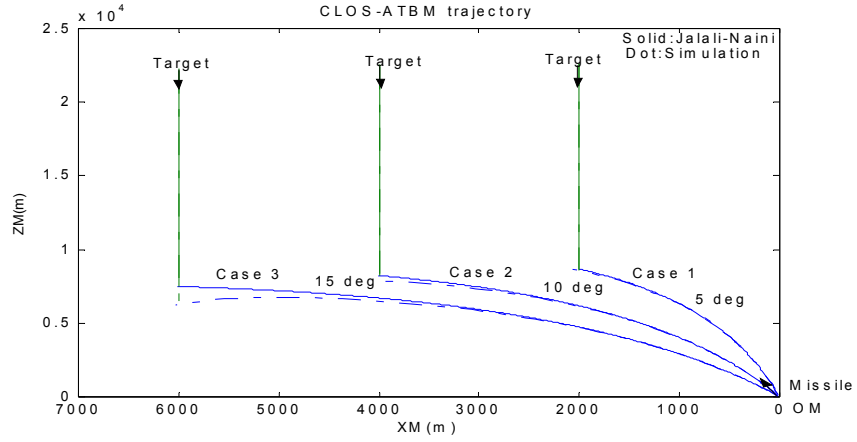


圖 7.仿 Jalali-Naini 法與模擬法飛彈軌跡之比較。

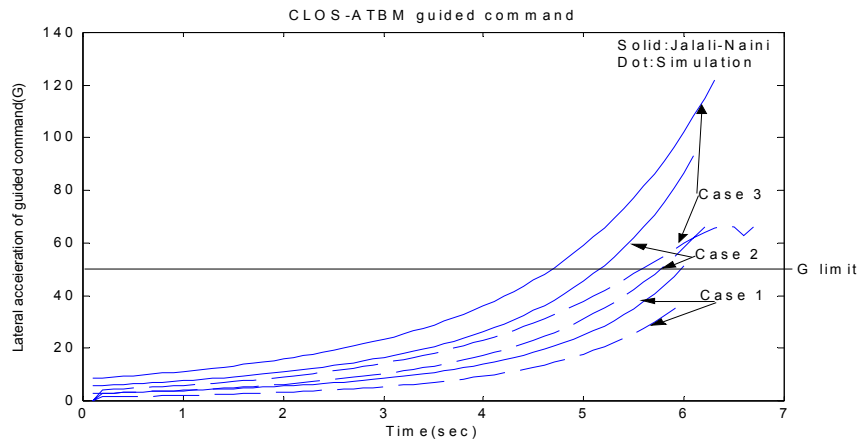


圖 8.仿 Jalali-Naini 法與模擬法飛彈側向加速度命令之比較。

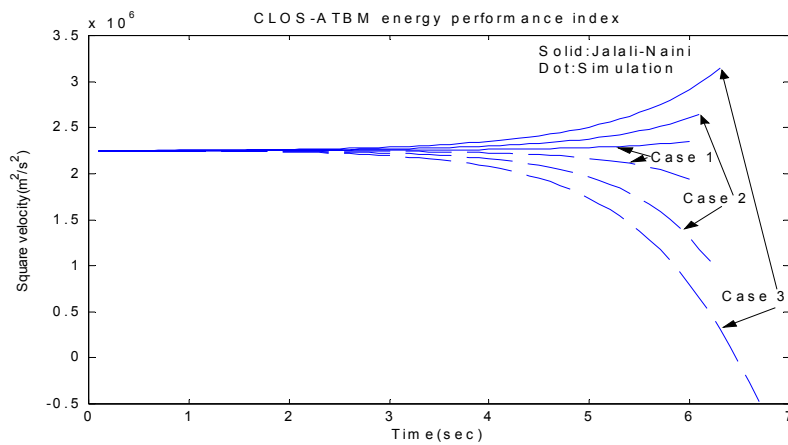


圖 9.仿 Jalali-Naini 法與模擬法飛彈撞擊能量指標之比較。

6.3 修正文氏法之分析

將(70)式寫成程式是文氏法求取側向加速度命令之做法。將前三場景中之側向加速度命令數值分別以模擬法與文氏法繪出如圖 10.，以利分析比較。由圖 10.知 CLOS 用於 TVM 導引律以模擬法以文氏法得出之側向加速度命令數值較不準確，因為圖 10.與圖 8.中虛線部分是相同的，文氏法場景 1 解析解所求得之實線較三條虛線均高，但是 Jalali-Naini 法場景 1 解析解所求得之實線在場景 1 和場景 2.虛線之間。

6.4 討論

1. 擊靶時間

Locke 方法估算 Time-to-go 之(25)或(28)式不受 p 值影響，仍屬正確。

2. 飛彈之軌跡

由上分析在 $p < 1$ 、 ΔX 、 β 數值小時，Jalali-Naini 法所求得之(75)式與模擬軌跡接近，可為就位時估算爾後軌跡之用。

3. 擊靶之條件

何種就位位置能擊靶？端視是否可達(55)式之條件。並且因為軌跡模擬之經驗，討論擊靶問題時為討論一終值(final value)問題。(76)式為修正(55)式而得，(55)式為完全從數學推導而得，其物理意義為飛彈一直跟隨視向線產生反應動作，動作範圍條件為 $0 < \beta < \pi$ ，允許飛彈調頭。然而在實際設計時，反彈道飛彈企圖造成迎頭攔截場景，動作範圍條件為 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ，更嚴格之規格甚至希望對撞或接近對撞而非側撞，其動作範圍條件給定為 $0 < \beta < \frac{\pi}{12}$ 。故擊靶條件修

正 $\beta = \frac{\pi}{12}$ 代入(55)式後得：

$$p \geq \frac{\sin \beta_0}{\frac{\pi}{12} - \beta_0} \quad (76)$$

以 $p=0.625$ 為例，在就位時 β_0 約小於 6 度方能順利擊靶。

4. 飛彈側向加速度之估算

經由分析比較，以採用 Jalali-Naini 法之(49)式較接近模擬。

5. 飛彈在後期之能量估算

殘餘動能之指標可將(52)式改寫為

$$V_M^2 = V_{M0}^2 \cos^2 \psi \quad (77)$$

ψ 仍由(51)式求出後代入(77)式，作圖與模擬法比較得圖 11.。由圖 11.知(77)式在就位距離近時可代表飛彈撞擊能量之指標。

本文以理論上 TVM 飛彈尋標器可量測之資料(ΔX 、 β)以解析方法解算 CLOS 導引就位點是否能夠順利攔截 $p < 1$ 條件下之目標，做為預估就位點之基本依據。期間並估算側向加速度命令之需求與最末端擊靶能量。將目標運動假設為高速直飛並無側向運動閃躲動作，在目標側向運動較小或目標軌跡平滑處理(Smoothing)近似一直線時，可採本文方法。解算過程將以往 Locke、Jalali-Naini、文式等解算 CLOS 導引律時， $p > 1$ 且為尾追之場景，重新修正為 TVM 飛彈終端攔截重返載具時， $p < 1$ 且為迎頭之場景。解析解算結果與前人模擬結果比較以修正 Jalali-Naini 方法最接近模擬結果，該法運算後知 TVM 飛彈使用 CLOS 導引律時，在 ΔX 固定為一定值時， β_0 決定是否能擊靶，現飛彈與目標速度比 p 合理給定為 0.625 時，在滿足(76)式之條件下， β_0 約小於 6 度。

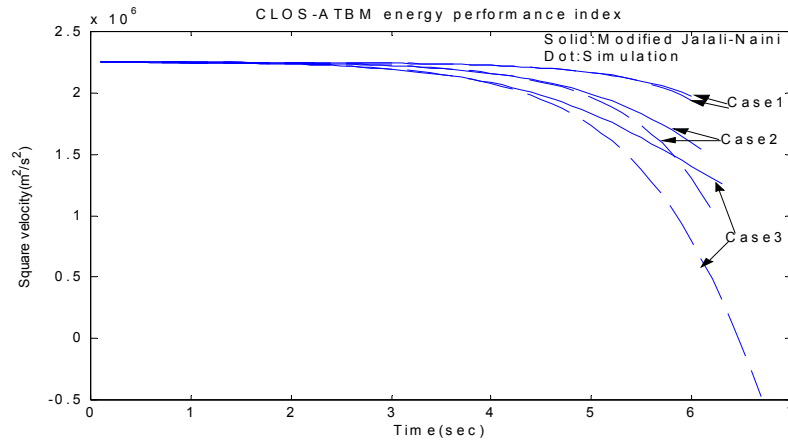


圖 10.仿文氏法與模擬法之側向加速度命令比較。

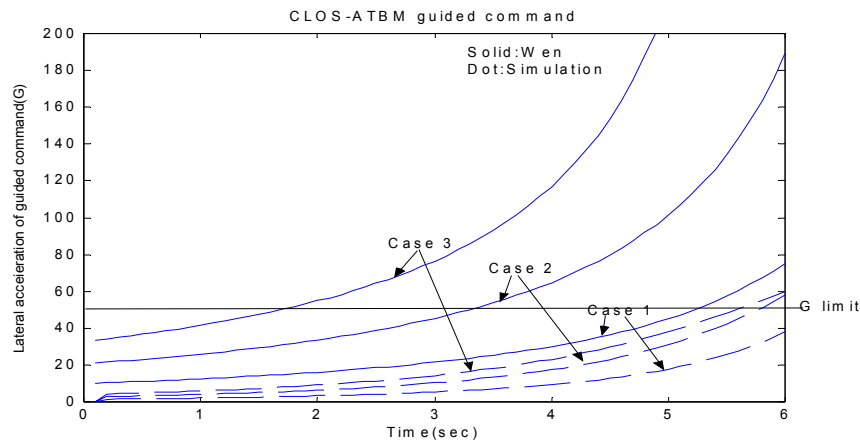


圖 11.修正 Jalali-Naini 法與模擬法飛彈撞擊能量指標之比較。

七、結論

在反彈道飛彈導引律設計上，CLOS 導引律結合 TVM 飛彈應用於終端擊靶在工程實踐上具備高度之優越性。可滿足我方硬體能力與實際空防需要。在模擬模式驗證獲得可信賴結果後，本文進一步以數學模式證明在守株待兔式「逆彈道」策略下，使就位點接近重返軌跡時可攔截高速彈道飛彈。解析方法研究中將文獻中對傳統 CLOS 之研究方法修正並驗證，發現在就位距離短、就位角度小時，常用之 Locke 法並不適用於描述 CLOS 導引律結合 TVM 飛彈終端攔截彈道

飛彈。但採用修正後之 Jalali-Naini 法計算得到軌跡、加速度命令及撞擊能量等，可描述 CLOS 導引律結合 TVM 飛彈終端攔截彈道飛彈之過程，(76)式並為擊靶與否之先決判斷式。本文精進原有 CLOS 導引律之應用，使之符合 $p < 1$ 且迎頭之反彈道飛彈想定狀況，並提供一基本之分析、設計方法，可做為逆彈道反彈道飛彈終端導引階段使用 TVM 結合 CLOS 導引律時，選定就位點之依據，並評估在此就位點之側向加速度需求與可產生之撞擊能量。

誌謝

本研究承蒙行政院國家科學委員會補助，計畫編號：NSC87-2212-E-157-004，特予誌謝。

參考資料：

- [1] Meller, R., "Patriot-The US army's mobile air-defense missile system nears production," International Defense Review, 1980.
- [2] Nesline, F. W., "Missile guidance for low altitude air defense," Raytheon Division Report, 1977.
- [3] Nesline, F. W., "Missile guidance for low altitude air defense," AIAA paper 78-1317, 1979.
- [4] Howe, R. M., Machal, R. E., and Tanner Eds, W. P., Guidance in Systems Engineering Handbook, McGraw-Hill, Section 19-3 Ballistic Guidance System, 1965.
- [5] Lee, S.-C., and Liu, C.-Y. "Improved trajectory estimation of reentry vehicles from radar measurement using on-line adaptive input estimator," IEICE Trans., Fundamentals, Vol. E81-A, No. 9, 1998.
- [6] Lee, S.-C., and Liu, C.-Y. "Trajectory estimation of reentry vehicles by using on-line input estimator," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, AIAA, Vol. 22, No. 6, 1999.
- [7] Lee, S. C., Huang, Y. C., and Liu, C. Y., "Trajectory estimation for tactical ballistic missile in terminal phase using on-line input estimator," Natl. Sci. Counc. R. O. C., 1999.
- [8] 莫辭中、宋真堯，武器系統工程短期講座，中正理工學院，1996.
- [9] Pastrick, H. L., Seltzer, S. M., and Warren, M. E., "Guidance laws for short-range tactical missile," J. Guidance and Control, Vol. 4, No. 2, AIAA 79-0059R, 1980.
- [9] Nesline, F. W., and Zarchan, P., "A new look at classical versus modern homing missile guidance," Raytheon Company Report, 1979.
- [10] 部耀宗，反彈道飛彈碰撞航向一般化導引方法之研究，中正理工學院兵器系統工程研究所碩士學位論文，1998.
- [11] 李守誠、宋真堯、陶長興、部耀宗，"反彈道飛彈碰撞航向之一般化導引方法之研究"，第七屆國防科技研討會論文集，1998.
- [12] 李守誠、宋真堯、陶長興、部耀宗，"反彈道飛彈碰撞航向之一般化導引方法之研究"，中國航空太空學會學刊，第31卷，第1期，1999.
- [13] 宋真堯、宋真坦、李守誠、陳昱丞，"精確攔截遠距高速螺旋彈道目標的終端導引設計"，第十屆國防科技研討會論文集，2001.
- [14] 陳昱丞，對具有閃躲操縱性重返載距之攔截導引系統設計，國防大學中正理工學院兵器系統工程研究所碩士學位論文，2002.
- [15] Howe, R. M., Machol, R. E., and Tanner Eds., W. P., Guidance in System Engineering Handbook, McGraw-Hill, 1965, Chap 19.
- [16] Lin, C.-L., and Chen, Y.-Y., "Design of

- fuzzy logic guidance law against high-speed target,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, AIAA, Vol. 23, No. 1, 2000.
- [17] Locke, A. S., George, S. F., Corum, C. E., and Barry, J. P., Guidance, Naval research laboratory, U.S.N.,1955, pp.446-459.
- [18] Locke, A. S., Guidance, D. Van Nostrand Company, Inc., 1960, pp.446-459.
- [19] Jalali-Naini, S. H., and Esfahanian, V. , “Closed-form solution of line-of-sight trajectory for non-maneuvering targets,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, AIAA, Vol. 23, No. 2, 2000.
- [20] 文仲輝，導彈系統分析與設計，北京理工大學出版社，1989，第四章.
- [21] Jerger, J. J., System preliminary design, D. Van Nostrand Company, Inc., 1960, pp.234-236.
- [22] Macfadzean, R. H. M., Surface-based air defence system analysis, Artech House, Norwood, MA, 1992, chap 5, pp139-148.