

無陀螺儀慣性導航系統與 GPS 整合之研究

洪兆宇 方淳民 王振宇 李守誠* 段伴虬

國防大學中正理工學院兵器工程系
*龍華科技大學資訊網路工程系

摘 要

無陀螺儀式慣性導航系統(Gyro-Free INS)，經由適當之機制組合(Mechanization)，可用以取代傳統 INS 運算獲得載具航向、航速與位置。由於系統誤差(System Error)影響，使得所計算載具之運動狀態誤差對於時間特別敏感。本論文研究整合六加速儀慣性導航系統與全球定位系統(GPS)，以改善無陀螺儀慣性導航系統誤差；主要研究主題有三，第一，推導系統於切平面座標(Tangent-Plane Coordinate)導航方程式；第二，推導六加速儀慣性導航系統誤差方程式；第三，整合六加速儀慣性導航系統及 GPS，對載具運動狀態進行估測(Estimation)。經由數值模擬結果，INS/GPS 誤差可降低約兩個級數(Two Orders)，可大幅改善系統導航精度，未來可應用於自動駕駛及無人飛行載具導航。

關鍵詞：慣性導航系統、固裝式、誤差方程式、卡爾曼濾波器

The Research of Integrating Gyroscope-Free Inertial Navigation System and GPS

Chao-Yu Hung, Chun-Min Fang, Chen-Yu Wang, Sou-Chen Lee*, and Pan-Chio Tuan

*Department of Weapon System Engineering, Chung Cheng Institute of Technology,
National Defense University*

**Department of Computer Information and Network Engineering
Lunghwa University of Science and Technology*

ABSTRACT

The Gyroscope-free inertial navigation system can measure the direction, velocity and position of a vehicle after a suitable configuration and mechanization. Because of system error effect, the navigation error of a Gyroscope-free INS is deeply affected by the time influence. This paper presents three important research issues. The first is the navigation equations of a Gyro free (six-accelerometer) INS that is based on the tangent-plane coordinate. The second is error equations of the proposed strap-down six-accelerometer INS. The third is a novel method for the integration of the six-accelerometer INS and the GPS. A superior result of simulation is found that the integrated INS/GPS can possess a more accurate navigation error, it almost have two orders less than conventional INS. The novel method of integrating six-accelerometer INS and GPS would be considered in auto-pilot and UAV design for the future application.

Keywords : INS, strap-down, error equation, Kalman filter

一、前言

無陀螺儀慣性導航系統(Gyro-Free INS)，係僅由加速儀組成之慣性導航系統。載具運動時，加速儀感測加速度，經由導航方程式運算可獲得載具位置、速度、姿態等資訊。源溯 1967 年 Schuler, Grammatikos, Fegler 三位學者最早提出至少使用九顆加速儀，取代傳統慣性導航系統，計算載具加速度與角速度[1]；至 1994 年 Chen, J. H.等三位學者為使加速儀數量更精簡，提出六加速儀機制動態方程式[2]。有關全加速儀機制之硬品實現，Kirill Semyonovich Mostov 運用六加速儀理論，設計一組慣性導航機制，並探討誤差對導航影響 [3]。而本實驗室近三年來在六加速儀理論應用上，研究利用六加速儀機制，藉由重力指示，解決初始姿態角問題[4]，並提出六加速儀機制校準(Calibration)方法[5]，以增進導航精度。

由於六加速儀慣性導航系統不同於傳統 INS 無需使用陀螺儀，其優點為具對稱性(Symmetry)，構型簡潔精緻體積小價格便宜，可承受較大 G 值，並可量測高動態目標的位置、速度、加速度及姿態且不受外界干擾；然缺點是系統誤差較傳統 INS 對時間較敏感，影響導航精度，故長時間使用時其誤差累積將使得系統發散。全球衛星定位系統(Global Positioning System GPS)是利用觀測 GPS 衛星廣播訊號來計算接收者的位置，具有誤差變異量不隨時間而變的特性優點，但 GPS 不適宜高動態、易造成脫鎖且會受到外在環境及電磁干擾，故不宜直接導航使用；本文將運用卡爾曼濾波器(Kalman Filter)，以前饋補償方式整合六加速儀 INS 與 GPS[6]。

本文計分五部分探討六加速儀慣性系統與 GPS 整合於導航上應用，第一，依據 Chen's 六加速儀動態方程式，導入重力及姿態影響，推導出切平面座標系(Tangent-Plane Coordinate)導航方程式；第二，由於系統誤差作用，導航方程式所計算出載具運動狀態含有誤差，因此運用導航方程式推導誤差方程式，可了解系統誤差狀態；第三，透過 GPS 資訊更新，運用卡爾曼濾波器整合，可降低導航誤差，增加導航精度；第四，為驗證整合六加速儀 INS 與 GPS 誤差狀態，將以數值方式模擬 INS/GPS 誤差狀況；第五，依據模擬結果作一討論並歸納結果。

二、六加速儀機制於切平面座標系導航方程式

慣性導航理論需要精準定義幾種座標系統，本文將以體座標(Body-Frame)、慣性座標(Inertial-Frame)及切平面座標(Tangent-Frame)來描述載具運動與慣性座標及切平面座標之關係。慣性座標係定義一座標系相對於恆星沒有任何加速度之座標系統，另體座標用以描述載具滾轉(Roll)、俯仰(Pitch)及偏航(Yaw)方向座標系統，而切平面座標用以描述載具相對於地表運動狀態。

2.1 姿態方程式

考慮一六加速儀機制與各座標系之關係如圖 1。

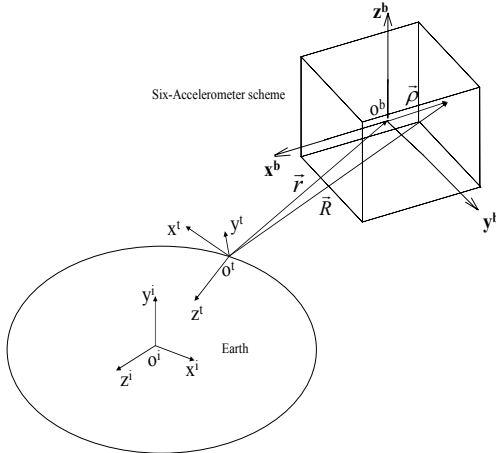


圖 1. 六加速儀機制與各座標系之關係圖。

則體座標系 (Body-Frame) 與切平面座標系 (Inertial-Frame) 間轉換矩陣，其方向餘弦導數為 [7]：

$$\dot{C}_b^t = C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] \quad (1)$$

其中 $\bar{\omega}_{ib}^b = \bar{\omega}_{ib}^b - \bar{\omega}_{it}^b$ 代入(1)式可得

$$\dot{C}_b^t = C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] - C_b^t [\bar{\omega}_{it}^b \times]$$

上式中 $C_b^t [\bar{\omega}_{it}^b \times] = [\bar{\omega}_{it}^t \times] C_b^t$ ，且 $\bar{\omega}_{it}^t = \bar{\omega}_{ie}^t$ 則

$$\dot{C}_b^t = C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] - [\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t \quad (2)$$

2.2 位置方程式

由附圖 1 知載具相對於地表位置向量可以 \vec{r}^i 表示，則相對於慣性座標位置向量可表為

$$\vec{r}^i = C_i^t \vec{r}^t \quad (3)$$

將(3)式中等號兩端相對於慣性座標對時間微分可得

$$\dot{\vec{r}}^i = C_i^t \bar{\omega}_{ie}^t \times \vec{r}^t + C_i^t \dot{\vec{r}}^t$$

則位置方程式可表為

$$\dot{\vec{r}}^t = \vec{v}^t \quad (4)$$

將(4)式代入上式得

$$\dot{\vec{r}}^i = C_i^t \bar{\omega}_{ie}^t \times \vec{r}^t + C_i^t \vec{v}^t \quad (5)$$

2.3 速度方程式

將(5)式相對於慣性座標再對時間微分，得

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}^i &= C_i^t \bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \vec{r}^t + \\ &2C_i^t \bar{\omega}_{ie}^t \times \vec{v}^t + C_i^t \dot{\vec{v}}^t \end{aligned} \quad (6)$$

將(6)式兩端前乘上 C_i^b ；則載具相對於慣性座標加速度以體座標描述，可表為

$$\begin{aligned} C_i^b \ddot{\vec{r}}^i &= C_i^b \bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \vec{r}^t + \\ &2C_i^b \bar{\omega}_{ie}^t \times \vec{v}^t + C_i^b \dot{\vec{v}}^t \end{aligned} \quad (7)$$

由於六加速儀機制係將六顆加速儀設計於一適當配置並安置於航具上，六顆加速儀以其所在不同位置可感測航具運動物理量，經數值運算可解析航具之位置、速度及姿態。令每單位質量之引力(Gravitation)為 \vec{G} ，各加速儀感測方向為 $\vec{\theta}_j$ 、輸出值為 s_j ，其動態方程式可表為

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\omega}}_{ib}^b \\ C_i^b \ddot{\vec{r}}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S/\rho \\ T \end{bmatrix} A + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 ρ 為體座標中心 o_b 至各加速儀之距離；

$$A = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6]^T ;$$

$$A_j = s_j + C_i^b \vec{G}^t \cdot \vec{\theta}_j ;$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

將(7)式代入(8)式可得

$$C_t^b (\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{r}^t + 2\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{v}^t + \dot{\bar{v}}^t) = \frac{1}{2} TA + \begin{bmatrix} \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

將(9)式等號兩端前乘上 C_b^t 可得

$$\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{r}^t + 2\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{v}^t + \dot{\bar{v}}^t = \frac{1}{2} C_b^t TA + C_b^t \begin{bmatrix} \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix}$$

上式重新整理

$$\dot{\bar{v}}^t = C_b^t \left(\frac{1}{2} TA + \begin{bmatrix} \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \right) - (\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{r}^t + 2\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{v}^t) \quad (10)$$

(10)式中 $A_j = s_j + C_t^b \bar{G}^t \cdot \bar{\theta}_j$; 其中 s_j 為加速儀輸出值 ; \bar{G} 為單位質量之引力 ; 今令

$$s = [s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6]^T ;$$

$$\bar{\omega}^2 = [\omega_y \omega_z \quad \omega_x \omega_z \quad \omega_x \omega_y]^T ;$$

$$g = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \quad g_5 \quad g_6]^T ;$$

$$g_j = C_t^b \bar{G}^t \cdot \bar{\theta}_j ;$$

則(10)式可改寫為

$$\dot{\bar{v}}^t = C_b^t \left(\frac{1}{2} T(s + g) + \bar{\omega}^2 \right) - (\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{r}^t + 2\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{v}^t) \quad (11)$$

2.4 角速度方程式

由(8)式中可得六加速儀機制角速度方程式為

$$\dot{\bar{\omega}}_{ib}^b = \frac{1}{2\rho} SA \quad (12)$$

由(11)式知 $A = s + g$ 代入(12)式可得

$$\dot{\bar{\omega}}_{ib}^b = \frac{1}{2\rho} S(s + g) \quad (13)$$

三、六加速儀機制誤差方程式

六加速儀慣性導航系統誤差主要包含加速儀原始偏差(Bias)、安裝位置誤差(Location Error)、安裝方向誤差(Oration Error)及計算誤差等,其中原始偏差量、安裝之位置、方向誤差可在實驗室中校準(Calibration)獲得,本文僅對計算誤差予以探討,並推導誤差方程式。

3.1 姿態誤差方程式

由(2)式姿態方程式中計算得方向餘弦矩陣(Direction Cosine Matrix) \hat{C}_b^t 與正確值 C_b^t 間關係可表為[8]:

$$\hat{C}_b^t = \left(I - [\bar{\phi} \times] \right) C_b^t \quad (14)$$

令

$$\delta C_b^t = -[\bar{\phi} \times] C_b^t \quad (15)$$

將(15)式代入(14)式整理得

$$\hat{C}_b^t = C_b^t + \delta C_b^t \quad (16)$$

將(16)式代入(2)式；並令 $\hat{\omega}_{ib}^b = \bar{\omega}_{ib}^b + \delta\bar{\omega}_{ib}^b$ ；

$\hat{\omega}_{ie}^t = \bar{\omega}_{ie}^t + \delta\bar{\omega}_{ie}^t$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{C}}_b^t = & (C_b^t + \delta C_b^t) \left([\bar{\omega}_{ib}^b \times] + [\delta\bar{\omega}_{ib}^b \times] \right) - \\ & \left([\bar{\omega}_{ie}^t \times] + [\delta\bar{\omega}_{ie}^t \times] \right) (C_b^t + \delta C_b^t) \end{aligned}$$

展開上式並忽略誤差高次項，則

$$\begin{aligned} \dot{\hat{C}}_b^t = & C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] + C_b^t [\delta\bar{\omega}_{ib}^b \times] + \\ & \delta C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] - [\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t - \\ & [\bar{\omega}_{ie}^t \times] \delta C_b^t - [\delta\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t \end{aligned} \quad (17)$$

將(17)式減去(2)式得

$$\begin{aligned} \delta\dot{C}_b^t = & C_b^t [\delta\bar{\omega}_{ib}^b \times] + \delta C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] - \\ & [\bar{\omega}_{ie}^t \times] \delta C_b^t - [\delta\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t \end{aligned} \quad (18)$$

將(15)式代入(18)式得

$$\begin{aligned} \delta\dot{C}_b^t = & C_b^t [\delta\bar{\omega}_{ib}^b \times] - [\bar{\phi} \times] C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] + \\ & [\bar{\omega}_{ie}^t \times] [\bar{\phi} \times] C_b^t - [\delta\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t \end{aligned} \quad (19)$$

另將(15)式等號兩端對時間微分得

$$\begin{aligned} \delta\dot{C}_b^t = & - \left[\dot{\bar{\phi}} \times \right] C_b^t - \\ & \left[\bar{\phi} \times \right] \left(C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] - [\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t \right) \end{aligned} \quad (20)$$

比較(19)式及(20)式，可得

$$\begin{aligned} \left[\dot{\bar{\phi}} \times \right] C_b^t = & [\delta\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t - C_b^t [\delta\bar{\omega}_{ib}^b \times] + \\ & \left[\bar{\phi} \times \right] \left(C_b^t [\bar{\omega}_{ib}^b \times] - [\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t \right) \end{aligned} \quad (21)$$

因

$$\begin{aligned} \left[\bar{\phi} \times \right] \left(C_b^t [\bar{\omega}_{ie}^t \times] - [\bar{\omega}_{ie}^t \times] \left[\bar{\phi} \times \right] C_b^t \right) = & ; \\ \left(\left[\bar{\phi} \times \right] \bar{\omega}_{ie}^t \right) \times C_b^t = & \\ \left[\delta\bar{\omega}_{ib}^b \times \right] = & C_b^t [\delta\bar{\omega}_{ib}^t \times] C_b^t [9] ; \end{aligned}$$

代入(21)式，得

$$\begin{aligned} \left[\dot{\bar{\phi}} \times \right] C_b^t = & [\delta\bar{\omega}_{ie}^t \times] C_b^t - [\delta\bar{\omega}_{ib}^t \times] C_b^t + \\ & \left(\left[\bar{\phi} \times \right] \bar{\omega}_{ie}^t \right) \times C_b^t \end{aligned}$$

由上式比較等號兩端得六加速儀機制之姿態誤差方程式為

$$\dot{\bar{\phi}} = \delta\bar{\omega}_{ie}^t - C_b^t \delta\bar{\omega}_{ib}^b - \bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\phi} \quad (22)$$

3.2 位置誤差方程式

由導航方程式中假設所計算速度為正確值與誤差值之合，今令

$$\bar{v}_c^t = \bar{v}_t^t + \delta\bar{v}^t \quad (23)$$

其中 $\dot{\bar{r}}_c^t = \bar{v}_c^t$ ；(23)可改寫為

$$\dot{\bar{r}}_c^t = \bar{v}_t^t + \delta\bar{v}^t \quad (24)$$

由(24)式減去(23)式得六加速儀機制位置之誤差方程式為

$$\dot{\delta\bar{r}}^t = \delta\bar{v}^t \quad (25)$$

3.3 速度誤差方程式

由(11)式速度方程式中令

$$\begin{cases} s_c = s_t + \delta s \\ \bar{r}_c^n = \bar{r}_t^n + \delta\bar{r} \\ \bar{v}_c^t = \bar{v}_t^t + \delta\bar{v}^t \end{cases} \quad (26)$$

將(16)式及(26)式代入(11)式中並忽略高次項誤差值，整理得

$$\dot{\bar{v}}_c = \left(C_b^c + \delta C_b^c \right) \left(\frac{1}{2} T(s_t + g_t + \delta s + \delta g) + \bar{\omega}_t^2 + \delta \bar{\omega}^2 \right) - \left(\bar{\omega}_{ie}^c \times \bar{\omega}_{ie}^c \times \bar{r}_t^c + \delta \bar{r}_t^c \right) + 2 \bar{\omega}_{ie}^c \times \left(\bar{v}_t^c + \delta \bar{v}_t^c \right) \quad (27)$$

其中

$$\delta \bar{\omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_y \delta \omega_z + \omega_z \delta \omega_y & \omega_x \delta \omega_z + \omega_z \delta \omega_x & \omega_x \delta \omega_y + \omega_y \delta \omega_x \end{bmatrix}^T$$

$$\delta g = [\delta g_1 \quad \delta g_2 \quad \delta g_3 \quad \delta g_4 \quad \delta g_5 \quad \delta g_6]^T; \delta g_j = \delta C_i^b \bar{G}^i \cdot \bar{\theta}_j$$

且

$$\bar{\omega}_c^2 = \bar{\omega}_t^2 + \delta \bar{\omega}^2;$$

$$g_c = g_t + \delta g;$$

將(27)式減去(11)式；並令 $\delta \bar{v}^t = \bar{v}_c^t - \bar{v}_t^t$ 可得

$$\delta \dot{\bar{v}}^t = \delta C_b^t \left(\frac{1}{2} T(s_t + g_t) + \bar{\omega}_t^2 \right) + C_b^t \left(\frac{1}{2} T(\delta s + \delta g) + \delta \bar{\omega}^2 \right) - \left(\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \delta \bar{r}^t + 2 \bar{\omega}_{ie}^t \times \delta \bar{v}^t \right)$$

將(15)式代入上式得

$$\delta \dot{\bar{v}}^t = -[\bar{\phi} \times] C_b^t \left(\frac{1}{2} T(s_t + g_t) + \bar{\omega}_t^2 \right) + C_b^t \left(\frac{1}{2} T(\delta s + \delta g) + \delta \bar{\omega}^2 \right) - \left(\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \delta \bar{r}^t + 2 \bar{\omega}_{ie}^t \times \delta \bar{v}^t \right)$$

由矩陣乘法 $-\bar{A} \times \bar{B} = \bar{B} \times \bar{A}$ 知；則上式整理得六加速儀機制速度誤差方程式

$$\delta \dot{\bar{v}}^t = C_b^t \left(\frac{1}{2} T(s_t + g_t) + \bar{\omega}_t^2 \right) \times \bar{\phi} + C_b^t \left(\frac{1}{2} T(\delta s + \delta g) + \delta \bar{\omega}^2 \right) - \left(\bar{\omega}_{ie}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \times \delta \bar{r}^t + 2 \bar{\omega}_{ie}^t \times \delta \bar{v}^t \right) \quad (28)$$

3.4 角速度誤差方程式

將角速度方程式考量誤差影響，(13)式可改寫為

$$\dot{\omega}_{ib}^b = \frac{1}{2\rho} S(s_t + \delta s) + \frac{1}{2\rho} S(g_t + \delta g) \quad (29)$$

將(29)式減去(13)式可得角速度誤差方程式

$$\delta \dot{\omega}_{ib}^b = \frac{1}{2\rho} S(\delta s + \delta g) \quad (30)$$

四、六加速儀慣性系統與 GPS 整合

六加速儀慣性導航系統係運用六顆加速儀，計算獲得載具加速度及角加速度，經由積分可獲得載具位置、速度及姿態。然六加速儀慣性系統誤差狀況對時間較敏感，因此，相較於 GPS 具有誤差變異量不隨時間而變的特性優點，可改善六加速儀導航之缺點。有關 INS/GPS 複合式導航系統架構，主要計有四種方法[10]：

- (1) 以 GPS 輔助 INS 之開迴路分散式複合法、
 - (2) 以 GPS 輔助 INS 之閉迴路分散式複合法、
 - (3) 以 INS 輔助 GPS 之開迴路集中式複合法、
 - (4) 以 INS 輔助 GPS 之閉迴路集中式複合法。
- 其中第一種方法係將 INS 與 GPS 整合，使用其估測結果，但未將估測結果對 INS 資料予以修正，導航誤差較大；第二種方法係改善第一種方法，即將估測結果對 INS 資料予以修正，可使誤差降低；而第三、四種方法系統狀態變數較高，較不易製作。綜合比較，本文將採用第二種方法作為導航系統架構。並運用卡爾曼濾波

器估測系統狀態變數。

由於 INS 所產生訊號頻率較 GPS 接收訊號頻率高，因此假設六加速儀慣性系統所計算輸出訊號為

$$S_{INS} = S + n_L \quad (31)$$

其中 S 為正確值， n_L 為 INS 低頻雜訊；另 GPS 量測訊號為

$$S_{GPS} = S + n_H \quad (32)$$

其中 n_H 為 GPS 高頻雜訊；今將(31)式減去(32)式可得

$$S_{INS} - S_{GPS} = n_L - n_H \quad (33)$$

將(33)式透過卡爾曼濾波器，可將高頻誤差濾掉，僅剩 INS 誤差，再以前饋補償方式，獲得導航資訊，有關 INS/GPS 整合流程圖如圖 2。

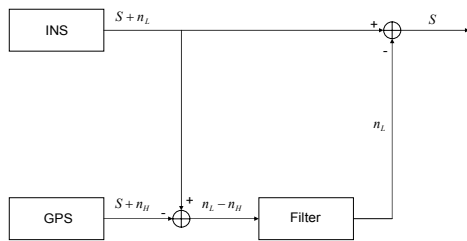


圖 2. 六加速儀慣性導航系統與 GPS 整合流程圖。

由圖 2 中示，本文使用卡爾曼濾波器之狀態方程式為誤差方程式，其狀態方程式由(22)式、(25)式、(28)式、(30)式可寫為：

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Lw(t) \quad (34)$$

其中 w 為程序雜訊(Process Noise)，假設為隨機常態分佈 $w \rightarrow N(0, Q)$ ；另

$$F = \begin{bmatrix} -2[\bar{\omega}'_{ie} \times] & -[[\bar{\omega}'_{ie} \times \bar{\omega}'_{ie}] \times] & 0 & [C'_b \left(\frac{1}{2} T(s_i + g_i) + \bar{\omega}'_i \right) \times] \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C'_b & -[\bar{\omega}'_{ie} \times] \end{bmatrix};$$

$$x = [\delta \bar{v}'^t \quad \delta \bar{r}'^t \quad \delta \bar{\omega}'_{ib}^b \quad \bar{\phi}]^T;$$

$$L = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}; w = \begin{bmatrix} C'_b \left(\frac{1}{2} T(\delta \bar{x} + \delta \bar{g}) + \delta \bar{\omega}'^2 \right) \\ 0 \\ \frac{1}{2\rho} S(\delta \bar{x} + \delta \bar{g}) \\ \delta \bar{\omega}'_{ie} \end{bmatrix}$$

比較(34)式之六加速儀慣性系統誤差狀態方程式與傳統 INS 誤差狀態方程式，可知六加速儀慣性系統較傳統 INS 誤差方程式多一組角速度誤差狀態，可提供較佳之估測值。為便於電腦運算可將(34)離散化，可改寫為

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Lambda(k)w(k) \quad (35)$$

其中

$$\Phi = e^{F^*T}; \Lambda w = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F^*T} * Lw(t) dt$$

另量測方程式可假設為：

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) \quad (36)$$

其中

v 為量測雜訊(Measurement Noise)，假設為隨機常態分佈 $v \rightarrow N(0, R)$

$$z = \begin{bmatrix} \delta \bar{v}' \\ \delta \bar{r}' \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\delta \bar{v}' = \bar{v}'_{INS} - \bar{v}'_{GPS}; \delta \bar{r}' = \bar{r}'_{INS} - \bar{r}'_{GPS}$$

有關卡爾曼濾波流程可區分為時間更新及量測更新兩步驟，其中定義量測更新時，其狀態估

測值為 \hat{x} ，變異量為 M ，卡爾曼增益值為 K ；
另時間更新時，其狀態估測值為 \bar{x} ，變異量為
 P 。分別表示為[附錄]：

量測更新：

$$K = MH^T (HMH^T + R)^{-1} \quad (37)$$

$$\hat{x} = \bar{x} + K(Z - H\bar{x}) \quad (38)$$

$$P = (I - KH)M \quad (39)$$

時間更新：

$$\bar{x} = \Phi \hat{x} \quad (40)$$

$$M = \Phi P \Phi^T + \Lambda Q \Lambda^T \quad (41)$$

本研究模擬所用卡爾曼濾波器流程可表如圖 3。

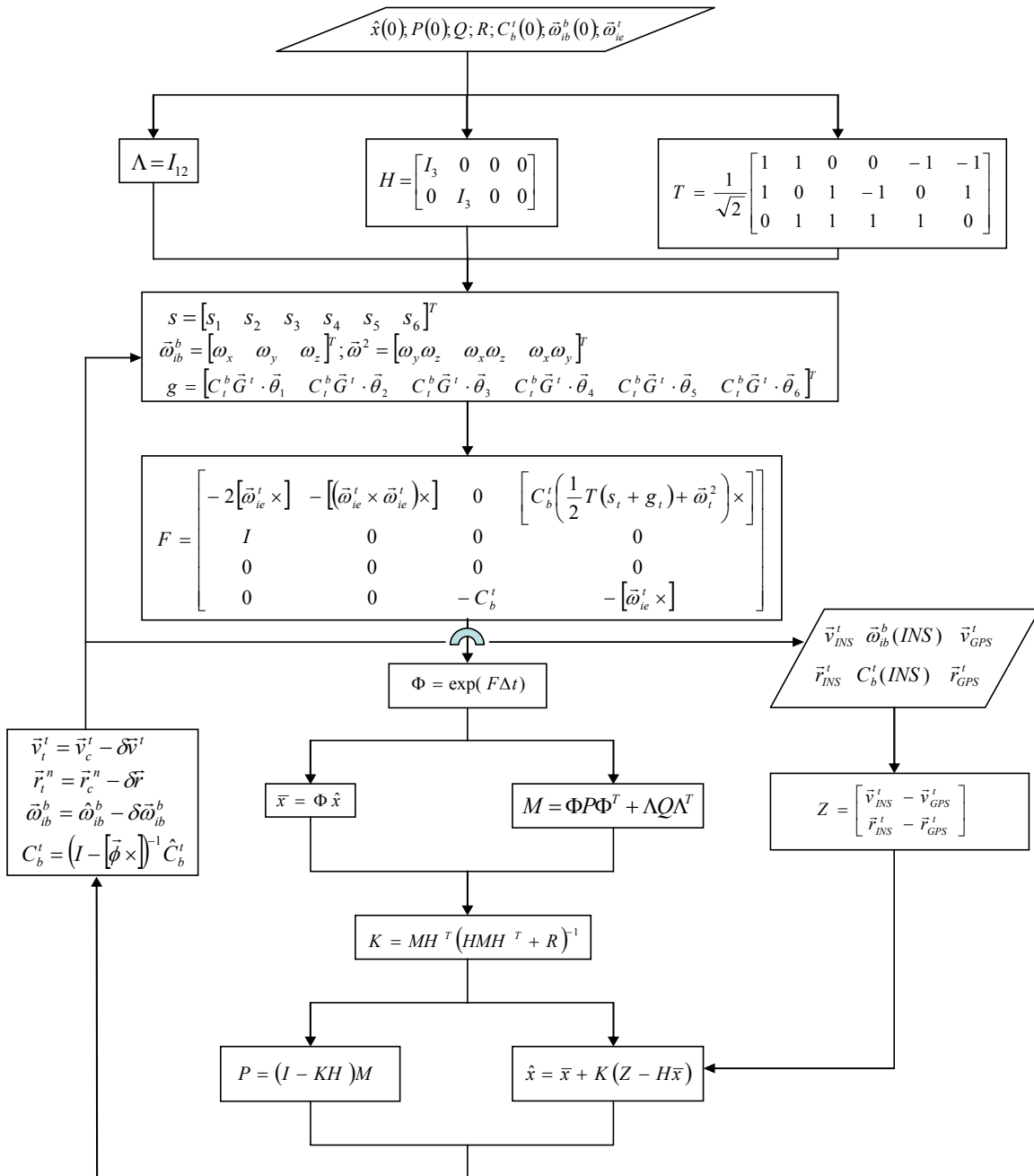


圖 3. 卡爾曼濾波器流程圖。

五、六加速儀 INS/GPS 模擬驗證

由於受慣性組件本身誤差影響，使得六加速儀慣性導航系統所計算載具運動狀態誤差，隨時間增加而增加；本文提出導航系統誤差方程式，整合六加速儀慣性及 GPS，以卡爾曼濾波器估測載具運動狀態，可提高導航精度。為模擬六加速儀機制，假設載具相對於切平面座標運動加速度為 $\vec{a}^t = [1 \ 0 \ 1]^T \text{ m/sec}^2$ ，另角加速度為 $\dot{\vec{\omega}}_{bt} = [0 \ \pi \ 0]^T \text{ rad/sec}^2$ ；則加速儀量測輸出值 s_j 獲得為：

$$s_j = \vec{f}_j \cdot \vec{\theta}_j \quad (42)$$

其中 $\vec{\rho}_j$ 為各加速儀位置向量，今設每一加速儀距體座標中心點距離 ρ 為 10cm ； $\vec{\theta}_j$ 為各加速

儀感測方向之單位向量。另 \vec{f}_j 為各加速儀比力 (Specific Force)，可由下式計算獲得

$$\vec{f}_j = C_t^b \left(\vec{a}^t + 2\vec{\omega}_{ie}^t \times \vec{v}^t + \vec{\omega}_{ie}^t \times \vec{\omega}_{ie}^t \times \vec{r}^t \right) + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^b + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\rho}_j^b - C_t^b \vec{G}^t$$

今假設 s_j 為隨機常態分佈，其誤差範圍約 0.1mg ；(35)式中系統程序誤差 $w \rightarrow N(0,1)$ ；(36)式量測誤差 $v \rightarrow N(0,0.1)$ ；六加速儀慣性導航系統比較六加速儀慣性系統計算頻率為 20HZ ，GPS 取樣周期為每秒一次。則經由電腦模擬六加速儀慣性導航系統與 INS/GPS 所計算載具相對於切平面座標系位置誤差比較圖分別如圖 4~圖 6。

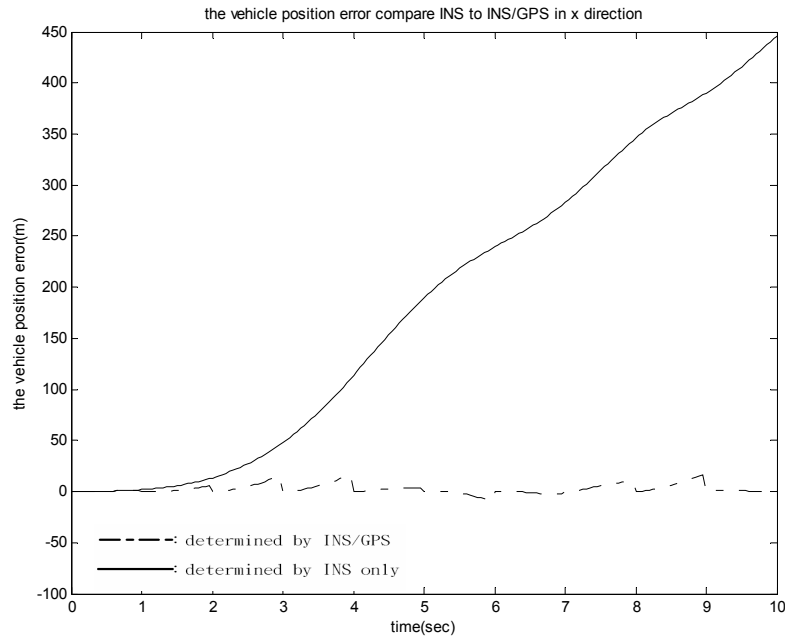


圖 4. 六加速儀慣性導航系統及 INS/GPS 於 x 軸向位置誤差比較圖。

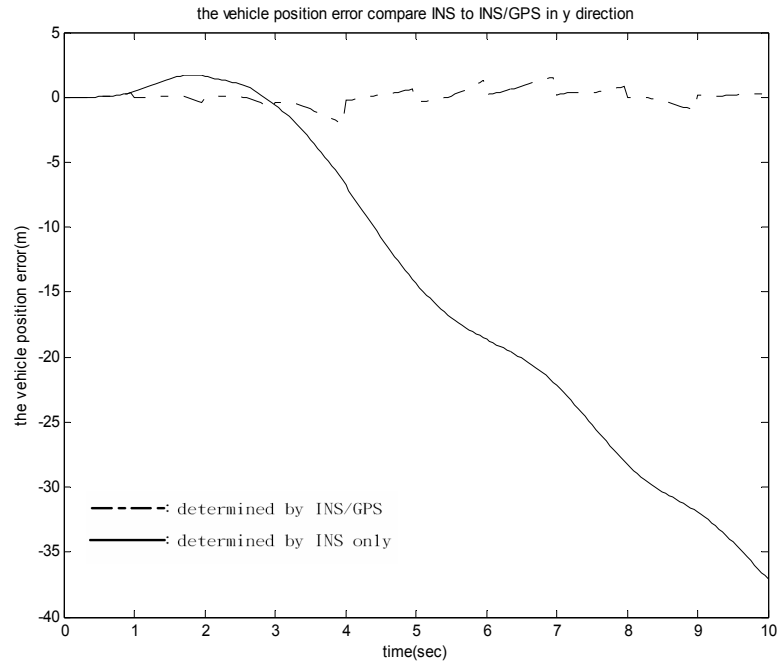


圖 5. 六加速儀慣性導航系統及 INS/GPS 於 y 軸向位置誤差比較圖。

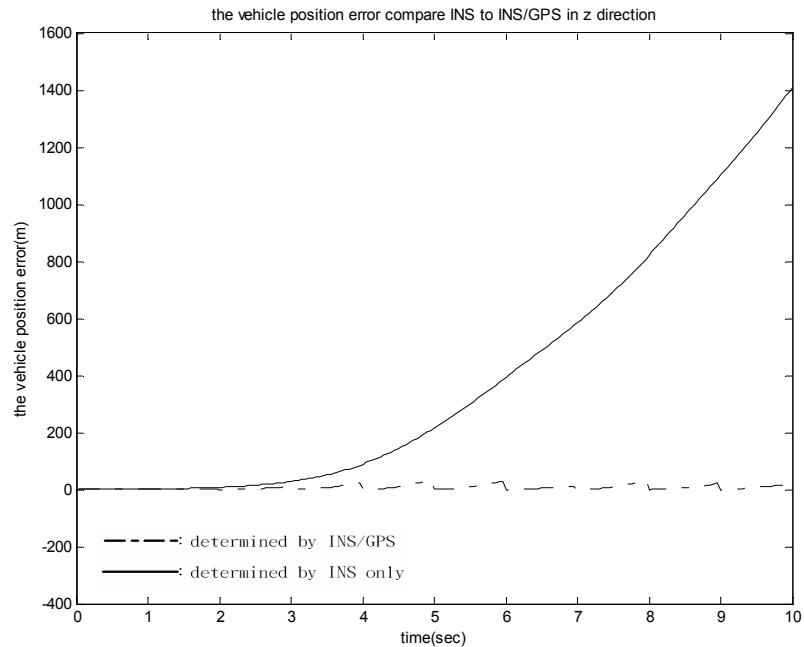


圖 6. 六加速儀慣性導航系統及 INS/GPS 於 z 軸向位置誤差比較圖。

由圖 4~圖 6 觀察，以六加速儀慣性導航系統所計算載具位置誤差對於時間非常敏感，依據

Chen's 誤差分析[2]，當載具靜止或等速運動時，六加速儀機制所計算線性加速度誤差為

$g\phi$ ，其位置誤差 δr^i 隨時間 t^4 成長。由本文中
所假設加速儀原差(Bias)，與六加速儀機制邊長
($2\rho = 20cm$)，時間 10 秒時所計算 y 軸概約為
 $40m$ 誤差，與模擬結果大致相符；而 x 軸與 z 軸
因受外力影響誤差較大，其中 x 軸概約為 $450m$
誤差，而 z 軸受重力之影響，其誤差對於時間
最敏感，概約為 $1400m$ 誤差。而運用卡爾曼濾
波器整合六加速儀慣性系統與 GPS，所獲得位
置狀態估測誤差，明顯較六加速儀慣性系統計
算位置誤差低，在時間五秒時， x 誤差相差二
階(Two Orders)、 y 誤差相差一階(One Order)、
 z 誤差相差一階；然當時間十秒時， x 誤差相

差二階(Two Orders)、 y 誤差相差一階(One
Order)、 z 誤差相差三階，顯示六加速儀慣性系
統在 z 軸誤差發散速度最快。另由於 GPS 每秒
鐘取樣一次，當取樣後經由卡爾曼濾波器估測
位置狀態，誤差明顯降低，但隨時間增加至下
次取樣時，其誤差呈拋物線成長，其中 x 及 z 軸
約增加至 $20m$ 以內， y 軸約增加至 $5m$ 以內，
故六加速儀慣性系統對受加速度軸向位置計
算，誤差成長較快。

另比較六加速儀慣性系統與六加速儀
INS/GPS 所計算載具相對於切平面座標系速度
誤差圖分別如圖 7~圖 9。

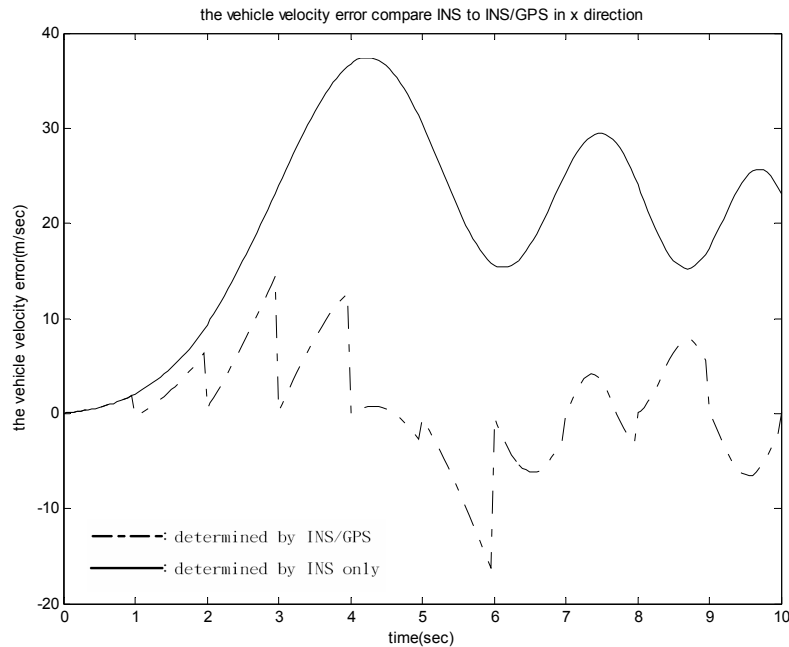


圖 7. 六加速儀慣性導航系統及 INS/GPS 於 x 軸向速度誤差比較圖。

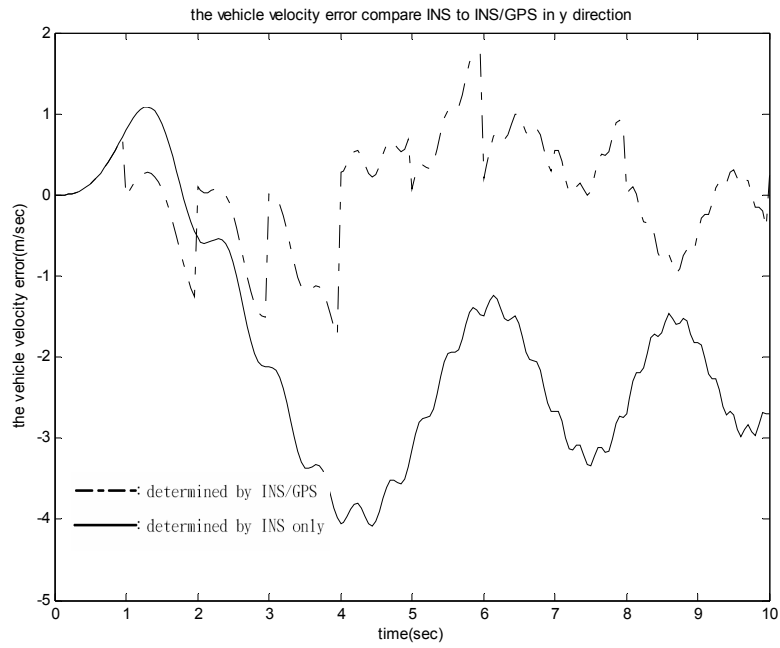


圖 8. 六加速儀慣性導航系統及 INS/GPS 於 y 軸向速度誤差比較圖。

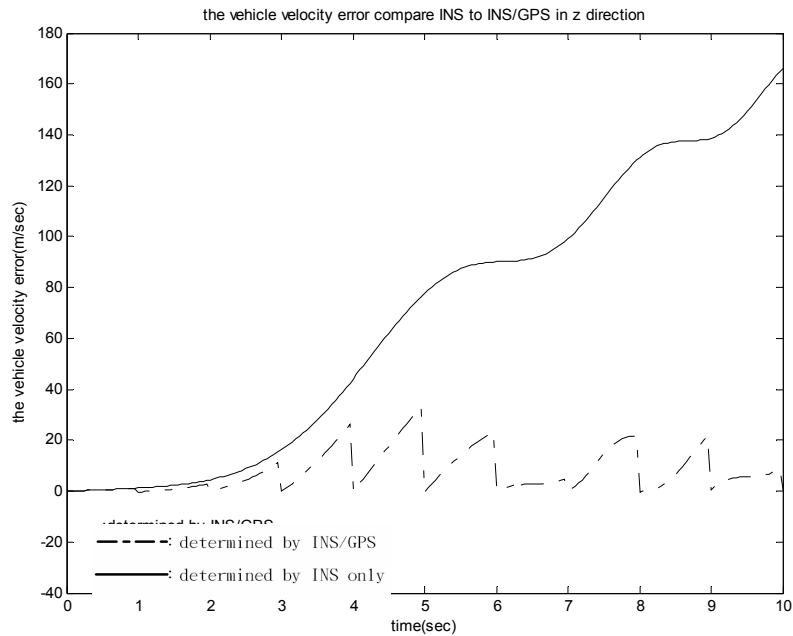


圖 9. 六加速儀慣性導航系統及 INS/GPS 於 z 軸向速度誤差比較圖。

由 Chen's 誤差分析指出，六加速儀慣性導航系統所計算載具速度誤差 $\delta \bar{v}'$ 隨時間 t^3 成長。因此時間 10 秒時，速度誤差概約較位置誤差減少一階，由圖 7~圖 9 觀察，與模擬結果相符；其中

x 軸概約在 40 m/sec 誤差範圍，在 y 軸概約在 5 m/sec 誤差範圍，而 z 軸受重力之影響誤差較大，概約在 180 m/sec 誤差範圍。而運用卡爾曼濾波器整合六加速儀慣性系統與 GPS，所獲得速度狀態估測誤差，仍較六加速儀慣性系統計算速度誤差低，但其誤差差距較位置誤差小，其中 x 與 y 軸最大誤差相差約二倍，而 z 軸運用卡爾曼濾波器所獲得速度誤差亦限制在一定範圍內，在時間五秒時，與六加速儀慣性系統計算速度誤差相差約二倍，在時間十秒時，誤差相差約十六倍。另由於 GPS 每秒鐘取樣一次，當取樣後經由卡爾曼濾波器估測速度狀態，誤差明顯降低，但隨時間增加至下次取樣時，其誤差約呈線性成長，其中 x 及 z 軸約增加至 20 m/sec 速度範圍以內， y 軸約增加至 2 m/sec 速度範圍以內，故六加速儀慣性系統對受加速度軸向速度計算，誤差成長較快。

六、結論

六加速儀導航系統精度主要受加速儀輸出誤差影響，由六加速儀慣性系統導航方程式了解，角加速度係由六顆加速儀輸出值線性組合，經積分後所獲得角速度，其誤差亦將隨時間成線性成長，對於後續計算姿態及位置均造成誤差放大影響，故顯見六加速儀導航系統誤差對於時間項敏感。

為解決系統精度對導航影響，本文運用卡爾曼濾波器整合六加速儀導航系統及 GPS，以前饋補償方式估測載具運動狀態，其中所提出誤差方程式，比傳統 INS 誤差方程式多出一組角加速度狀態，故六加速儀慣性導航系統可對於載具角速度誤差進行估測，而傳統 INS 則無

此一功能。

經由電腦模擬驗證結果了解，六加速儀慣性導航系統誤差受重力及載具運動方向之影響較大，其中位置誤差在 x 、 y 、 z 軸隨時間增加發散，另速度誤差在 x 、 y 軸限制在一定範圍內，其中 x 軸限制在 40 m/sec 速度範圍以內， y 軸限制在 5 m/sec 速度範圍以內，但 z 軸隨時間增加發散；而整合 INS/GPS 可有效改善各種誤差狀況，將誤差限制在一定範圍內，其中位置誤差在 x 及 z 軸限制 20m 以內， y 軸限制在 5m 以內，另速度誤差在 x 及 z 軸限制在 20 m/sec 速度範圍以內，在 y 軸限制在 2 m/sec 速度範圍以內。未來可結合硬品實作，整合六加速儀慣性導航系統及 GPS，將可應用於無人飛行載具(UAV)、機器人(Robot)及開發自動駕駛控制系統，以達實用價值。

參考文獻

- [1]Schuler, A. R., Grammatikos, A., and Fegler, K. A., "Measuring Rotational Motion with Linear Accelerometers," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-3 No. 3, pp. 465-471, 1967.
- [2]Chen, J. H., Lee, S. C., and DeBra, D. B., "Gyroscope Free Strapdown Inertial Measurement Unit by Six Liner Accelerometers," Journal of Guidance, Control, and Dynamics AIAA Vol. 17, No.2, pp.286-290, 1994.
- [3]Kirill Semyonovich Mostov, "Design of Accelerometer-Base Gyro-Free Navigation System," A Dissertation Submitted in Partial Satisfaction of The Doctor of Philosophy in Engineering-Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, Chap. 5, pp. 178-225, 2000.
- [4]李守誠、劉正瑜、王亞民，"無陀螺儀固裝式慣性導航系統對初值問題之研究"，中正嶺學報第二十六卷第一期，頁 11-24，1997。

- [5]李守誠、洪兆宇、方淳民、王振宇，“六加速儀機制導航應用與方向誤差校準方法之研究”，中正嶺學報預定第三十三卷第二期以論文方式刊登(接受日期 93.9.6)。
- [6]John J. D’Azzo, Constantine H. Houpis, Linear Control System Analysis and Design Conventional and Modern, McGRAW-HILL Book Company, New York, Chap. 13, pp. 478-479, 1988.
- [7]Walter Wrigley, Walter M. Hollister, and William G. Denhard, Gyroscopic Theory, Design, and Instrumentation, The Massachusetts Institute of Technology Press, the United States of America, Chap. 12, pp. 241-242, 1969.
- [8]Kenneth R. Britting, Sc. D., Inertial Navigation System Analysis, Wiley-Interscience, New York, Chap 6, pp. 86-91, 1971.
- [9]Kenneth R. Britting, Sc. D., Inertial Navigation System Analysis, Wiley-Interscience, New York, Chap 2, p. 15, 1971.
- [10]林君明、林鴻志、張博光，“全球定位系統輔助之慣性導航複合系統之研究”，中國航空太空學會學刊第二十七卷第三期，頁 213-221，1995。

附錄

卡爾曼濾波器區分為兩階段執行，第一階段僅考量系統狀態隨時間改變情形，故為時間更新，第二階段係考量量測值對狀態估測情形，故為量測更新；今考量一系統動態方程式為：

$$x_k = \Phi x_{k-1} + \Lambda \omega_{k-1} \quad (1)$$

其中 ω 為系統誤差，為隨機常態分佈， $\omega \rightarrow N(0, Q)$ ；將(1)等號兩端取期望值可得

$$\bar{x}_k = \Phi \bar{x}_{k-1} \quad (2)$$

上式中 $\bar{x}_k = E(x_k)$ ；為時間更新之狀態估測值；而 \bar{x}_k 之變異量 M 為

$$M = E[(x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^T] \quad (3)$$

將(1)式、(2)式代入(3)求得

$$M = \Phi P \Phi^T + \Lambda Q \Lambda^T \quad (4)$$

其中 P 為前一次量測更新後，狀態估測值之變異量。

另假設量測方程式可寫為

$$Z_k = H x_k + v_k \quad (5)$$

其中 v 為量測誤差，為隨機常態分佈， $v \rightarrow N(0, R)$ ；為求量測更新後狀態估測值 \hat{x} ，假設 \hat{x} 為 \bar{x} 及 Z 的線性組合，可表為

$$\hat{x}_k = a \bar{x}_k + b Z_k \quad (6)$$

由於 \hat{x} 、 \bar{x} 之估測狀態均具有無偏性，故

$$E[x] = E[\bar{x}] = E[\hat{x}] \quad (7)$$

將(5)式代入(6)式後取期望值整理得

$$E[\hat{x}_k] = a E[\bar{x}_k] + b H E[x_k] \quad (8)$$

將(7)式代入(8)後可得

$$a = I - b H \quad (9)$$

將(9)式代入(6)式整理得

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K(Z_k - H \bar{x}_k) \quad (10)$$

上式中 $K = b$ 為卡爾曼增益，另 \hat{x} 估測值之變異量 P 定義為

$$P = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \quad (11)$$

將(5)式代入(10)式得

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K[H(x_k - \bar{x}_k) + v_k] \quad (12)$$

將(12)式代入(11)式整理得

$$P = (I - KH)E[(x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^T](I - KH)^T + KE[v_k v_k^T]K^T - (I - KH)E[(x_k - \bar{x}_k)v_k^T]K^T - KE[(x_k - \bar{x}_k)^T](I - KH)^T$$

由(5)式知 x_k 與 v_k 無關，則上式可改寫為

$$P = (I - KH)E[(x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^T](I - KH)^T + KE[v_k v_k^T]K^T$$

將(3)式代入上式整理得

$$P = (I - KH)M(I - KH)^T + KRK^T \quad (13)$$

(13)式中變異量 P 為 K 的函數，為求得最佳估測值，須使變異量最小，故令(13)式對 K 偏微分為零，則

$$-2(I - KH)MH^T + 2KR = 0$$

上式移項整理得卡爾曼增益 K 值為

$$K = MH^T(HMH^T + R)^{-1} \quad (14)$$

將(14)式代入(13)式整理得

$$P = (I - KH)M \quad (15)$$