

## 支持向量迴歸技術應用於時變邊界熱通量逆向估算

鄧世剛<sup>1</sup> 林聖義<sup>2\*</sup> 黃宇川<sup>3</sup>

<sup>1</sup>國防大學理工學院動力暨系統工程學系

<sup>2</sup>國防大學理工學院國防科學研究所

<sup>3</sup>海軍戰鬥系統工廠

### 摘 要

本研究提出以支持向量迴歸演算法求解逆向熱傳導問題的新概念，應用於估算未知時變邊界條件，藉由機器學習演算法優勢解決複雜的逆向估算問題。研究先用模擬分析方式找出逆向關係中的重要變數，接著以支持向量迴歸演算法訓練獲得具備逆向估算能力的迴歸模型。有別於傳統求解方式需詳細逆向推導及繁瑣遞迴迭代才能逼近求解，此新概念僅找出逆向關係中的重要變數，其它複雜計算則交由支持向量迴歸演算法完成，最終的逆向迴歸模型是學習網路透過適當訓練後得。研究結果顯示以支持向量迴歸演算法獲得的逆向迴歸模型，除具備運用便利的優勢外，其估算結果良好、穩健並可克服不適定問題，且有良好泛化能力。

**關鍵詞：**支持向量迴歸，機器學習，逆向熱傳導問題

## Application of Support Vector Regression to Estimate Time Dependent Heat Flux Boundary Condition

S. Deng<sup>1</sup>, Seng-Yi Lin<sup>2\*</sup>, and Yuchuan Hwang<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Department of Power Vehicle and Systems Engineering, Chung-Cheng Institute of Technology, National Defense University*

<sup>2</sup> *School of Defense Science, Chung-Cheng Institute of Technology, National Defense University*

<sup>3</sup> *Naval Combat System Facility*

### ABSTRACT

This research provides a new ideal that applying Support Vector Regression (SVR) algorithm to resolve the Inverse Heat Conduction Problems (IHCP) – estimating time dependent heat flux boundary condition. The purpose of this study is to utilize the advantages of machine learning method to deal with the complex inverse problem. We first analysis the direct problem to get the important variables of the inverse relationship and then use SVR algorithm to obtain an optimal regression model, which represents the inverse relationship between the heat flux and the corresponding temperature data. Unlike other transitional methods for IHCP, this new method can get optimal inverse regression model by suitable training process and does not need complex calculation and iterations. Four unknown time dependent heat flux conditions were estimated and the results show that the regression model not only has good convergence and comprehensive ability but also can overcome the ill-posed problem.

**Keywords:** support vector regression, machine learning, inverse heat conduction problem

文稿收件日期 99.8.18.；文稿修正後接受日期 100.3.22.；\*通訊作者

Manuscript received August 18, 2010；revised March 22, 2011.；\*Corresponding author

## 一、前言

在固體熱傳導問題中，當統御方程式、邊界條件及初始條件皆已知進而求解溫度分佈的過程，稱為正向熱傳導問題(Direct Heat Conduction Problems, DHCP)；然而某些特定情況下，部分邊界條件是無法掌控的，為進一步計算此邊界條件對整個系統所造成的影響，有必要將其估算出來，最常見的方法是利用在物體內部或非受熱面所量測到的溫度資料，結合其它已知統御方程式、邊界條件及初始條件，對未知邊界條件進行估算，此即為逆向熱傳導問題(Inverse Heat Conduction Problems, IHCP)。典型 IHCP 如航空器從外太空返航時，大氣層摩擦產生的高溫高熱將影響航空器安全，有必要精確計算出作用在航空器表面的熱能量，方便後續機殼結構設計及材料選取參考，使其符合安全要求。但此時因表面熱量過高及空氣切應力過大等因素，無法在表面安裝溫度計直接量測，僅能從機殼內部安裝溫度計獲得相關資訊，逆向估算發生在表面處的熱行為[1]。其它 IHCP 應用在國防工業的案例，如火箭或飛彈發射時，藉由量測其它位置的溫度來反推噴嘴處的熱通量，以及槍(砲)發射時，量測發射時槍(砲)管外部溫度來反推膛內表面熱通量。

傳統 IHCP 求解技術繁多，例如 Huiping 等[2]估算金屬冷卻程序中未知表面時變熱對流係數，研究中用有限元素法(Finite Element Method, FEM)進行數值離散，接著用估算溫度與量測溫度的誤差向量最小長度的概念來產生目標函數，最後運用 Advance Retreat Method 結合 Golden Section Method 進行迭代求解；Yang [3]估算二維系統中未知邊界條件，先用有限差分法(Finite Difference Method, FDM)數值離散，並用 Newton-Raphson Method 產生目標函數，接著導入未來時間步階概念用循序法迭代求解離散邊界條件；Lesnic 等[4]估算一維平板表面溫度與表面熱通量，運用邊界元素法(Boundary Element Method, BEM)數值離散，用最小誤差平方和當作目標函數迭代求解；Chen 等[5, 6]將卡爾曼濾波器技術搭配遞迴式輸入估測法，應用於槍管發射時膛內表面熱通量估算及飛彈發射時噴嘴熱通量估算運用於表面熱通量估算，卡爾曼濾波器技術是

常被用在信號處理與控制問題的最佳化演算法，主要概念是搭配最小平方方法產生目標函數，靠著遞迴迭代的方式讓估算值與量測值之間的誤差最小化；Liu [7]運用(Genetic Algorithm, GA)逆向估算一維平板內熱源，先引入函數指定法概念合理假設待估算熱源的函數型態，接著用最小平方方法建構含待定參數的目標函數，最後以 GA 求解最佳參數組合；Shi 等[8]估算金屬蒸發冷卻過程表面熱通量，把冷卻水柱假設為一維不可壓縮流，探討對熱金屬的冷卻效果，研究中用 FDM 數值離散並以最小平方方法建構目標函數，最後用共軛梯度法(Conjugate Gradient Method, CGM)求解最佳化問題，另探討溫度計安裝位置對估算結果影響；Wang 等[9]估算長條狀金屬與平板金屬摩擦產生的熱源，用積分法搭配最小平方方法產生目標函數，用 CGM 求解最佳化問題；Huang 等[10]在三維系統同時估算兩個不規則界面形狀函數，研究中直接用套裝軟體(CFD-ACE+)求解獲得離散數值，用積分法搭配最小平方方法產生目標函數，用 CGM 求解最佳化問題，並探討量測誤差大小對於估算結果的影響；Yang 等[11]估算條狀與平板複合材質的表面溫度與熱通量，引入不平衡原則概念建立正向熱傳遞模型，用積分法搭配最小平方方法產生目標函數，用 CGM 求解最佳化問題。

從前述文獻探討可知，各類求解方法相異處主要在於不同最佳化求解技術的運用，於是有學者將機器學習技術導入 IHCP，其中以人工神經網路(Artificial Neural Network, ANN)最具代表性。2006 年到 2008 年間，Deng 與 Hwang [12-14]把 ANN 技術有效地運用在 IHCP，先假設數組已知邊界條件以正解產生訓練資料用 BPN 進行訓練，當模型完成訓練後只要輸入溫度資料便可以反推未知邊界條件，估算弦波、方波及三角波等基本波型組合的時變函數，研究顯示估算結果相當精確穩健。Manickaraj 等[15]估算液-固耦合系統的熱對流係數，研究中用 FDM 進行數值離散產生訓練資料，用 BPN 技術建立逆向估算模型，過程中調整網路結構並比較其效能。Chudzik [16]同時估算絕熱材料的熱傳導係數以及熱擴散係數，以 FEM 正解產生訓練資料，用 ANN 技術建立逆向估算模型，最後搭配實驗用溫度探針及溫度計來獲得溫度資料，輸入估算模型即可得到兩個未知參數。

從前述 ANN 求解 IHCP 文獻可得，此技術最大優勢為不需經過複雜繁瑣推導，僅需準備適當的輸入及輸出資料讓網路學習，過程中注意網路結構與相關參數調整並增加穩定機制，即可容易地建立具備精確逆向估算能力的模型，但以 ANN 求解有以下缺點：(1)學習網路待決定參數太多(2)每次計算結果是存在相當程度變異的近似最佳解(3)需在演算過程另外增加穩定機制來克服不穩定現象。支持向量迴歸(Support Vector Regression, SVR)演算法可有效改善 ANN 求解缺點：(1)過程中需選取的參數僅 2 到 4 個，相較於 ANN 動輒需選取十餘個參數更為便利(2)在計算過程中將問題轉換成二次規劃型態有效逼近全域最佳解，每次計算結果都相同(3)演算法本身具備正規化特性可克服不穩定現象。此演算法是由 Vapnik 博士與其工作團隊在 90 年代提出的機器學習演算法 [17]，它以統計學習理論(Statistical Learning Theory, SLT)為基礎，依據結構風險最小化原則(Structural Risk Minimization, SRM)，求解過程同時權衡網路結構產生的誤差及訓練產生的誤差，來達到最佳化目的。此算法最初僅被設計用來求解分類問題，隨後被擴展運用於處理迴歸問題，它在實現 SRM 概念時，利用最佳化的手段把問題轉換成二次規劃型態，因此可有效逼近全域最佳解 [18]；此外藉由引入核函數(Kernel Function)，可以將問題映射到高維度特徵空間中進行線性求解，具備處理複雜問題的能力。

本研究目的在導入新興機器學習技術 SVR 解決逆向熱傳導問題，保有 ANN 處理 IHCP 的優勢，並克服 ANN 求解缺點。研究中以模擬分析方式，歸納出逆向估算過程中重要影響因素，接著設計一組適當的時變熱通量，用 FDM 正解溫度分佈並產生適當訓練資料，交由 SVR 訓練後建立估算模型，並用以估算數組複雜的時變熱通量。此外，為驗證估算模型可克服求解 IHCP 的不穩定特性，測試資料輸入估算模型前，先加入合理的處理誤差，觀察估算模型是否會因為微小的輸入誤差造成估算結果的劇烈擾動。

## 二、支持向量迴歸運算流程簡述

簡述 SVR 運算流程如下 [19]：假設將某一訓練集提供給學習網路，目的在獲得輸入-

輸出之間的關係  $f(x)$ 。此訓練集  $T = \{[\mathbf{x}(i), y(i)] \in R^n \times R, i=1, \dots, p\}$  包含  $p$  組輸入-輸出對應資料  $(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_p, y_p)$ ，其中輸入向量  $\mathbf{x}$  為  $n$  維向量  $\mathbf{x} \in R^n$  且系統輸出值  $y \in R$  是一個連續數值。此時假設要求解的線性迴歸超平面  $f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  為：

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b \quad (1)$$

其中  $\mathbf{w}$  代表變數權重向量， $b$  代表截距值。有別於 SVM 使用 0, 1 損失函數，SVR 引入  $\varepsilon$  不敏感損失函數：

$$E(\mathbf{x}, y, f) = |y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})|_{\varepsilon} = \begin{cases} 0, & \text{if } |y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})| \leq \varepsilon \\ |y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})| - \varepsilon, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

此函數定義一條  $\varepsilon$  帶如圖 1，若預測值落在  $\varepsilon$  帶內則訓練損失(誤差)即為 0，對於那些預測值落在  $\varepsilon$  帶外的點，訓練損失即該點和  $\varepsilon$  帶之間的距離。此時經驗風險因為  $\varepsilon$  不敏感損失函數引入變成：

$$R_{emp}^{\varepsilon}(\mathbf{w}, b) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p |y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b|_{\varepsilon} \quad (3)$$

接著依據 SRM 原則同時最小化經驗風險  $R_{emp}^{\varepsilon}$  以及  $\frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2$ 。因此可藉由最小化(4)式，來得到最佳迴歸超平面  $f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ ：

$$\text{Min } R = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^p |y - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})|_{\varepsilon} \quad (4)$$

為增加迴歸超平面允錯彈性，引入兩個正值鬆弛變數  $\xi, \xi^*$ ，允許訓練點落在  $\varepsilon$  帶外：

$$|y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})| - \varepsilon = \xi \quad (5a)$$

允許訓練點落在  $\varepsilon$  帶上方

$$|y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})| - \varepsilon = \xi^* \quad (5b)$$

允許訓練點落在  $\varepsilon$  帶下方

鬆弛變數引入，最小化(4)式等於最小化(6)式：

$$\text{Min } R_{\mathbf{w}, \xi, \xi^*} = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \left( \sum_{i=1}^p \xi + \sum_{i=1}^p \xi^* \right) \quad (6)$$

此時限制式為：

$$y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b \leq \varepsilon + \xi_i, \quad i=1,2,\dots,p \quad (7a)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^*, \quad i=1,2,\dots,p \quad (7b)$$

$$\xi_i \geq 0, \quad \xi_i^* \geq 0 \quad (7c)$$

接著運用 Lagrange 方法將目標式與限制式合併，並引入 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 條件將問題轉換成二次規劃型態，求解 Lagrange Multipliers，續計算迴歸超平面的最佳權重向量如(8)式：

$$\mathbf{w}_0 = \sum_{i=1}^p (\alpha_i - \alpha_i^*) \mathbf{x}_i \quad (8)$$

最後可計算出最佳迴歸超平面如(9)式：

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x} + b = \sum_{i=1}^p (\alpha_i - \alpha_i^*) \mathbf{x}_i^T \mathbf{x} + b \quad (9)$$

其中  $\alpha_i, \alpha_i^*$  即所謂的 Lagrange Multipliers。落在  $\varepsilon$  帶內部的訓練點，其 Lagrange Multipliers 等於 0，而那些 Lagrange Multipliers 不為 0 的訓練點，即是構成迴歸超平面  $f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  的支持向量。而在非線性狀況下，則直接引入核函數  $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$  如(10)式：

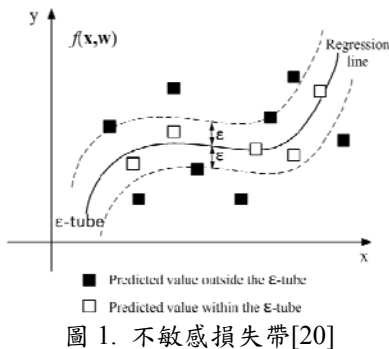
$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x} + b = \sum_{i=1}^p (\alpha_i - \alpha_i^*) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b \quad (10)$$

此時截距值可藉由  $\varepsilon$  帶上方或下方的訓練點計算如(11)式：

$$b = y_i - \sum_{j=1}^{U\_SVs} (\alpha_j - \alpha_j^*) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \varepsilon, \quad \text{for } 0 < \alpha_i < C \quad (11a)$$

$$b = y_i - \sum_{j=1}^{L\_SVs} (\alpha_j - \alpha_j^*) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \varepsilon, \quad \text{for } 0 < \alpha_i < C \quad (11b)$$

其中  $U\_SVs$  代表上界支持向量點數量， $L\_SVs$  代表下界支持向量點數量。



### 三、逆估算重要變數選取

#### 3.1 問題描述與假設

本研究假設受熱物體是單一材質、均質、等向性且無內熱源產生的鋁板，並假設大面積均勻受熱，因縱軸溫度相較於橫軸溫度無明顯變化，所以將其簡化成一維熱傳導問題。相關熱物參數如熱傳導係數 (thermal conductivity)  $k$ 、密度  $\rho$  以及比熱 (specific heat)  $C_p$  均假設為常數，終止時間假設為  $t_f$ ，並假設兩邊界條件均為熱通量邊界條件 (非受熱面假設為絕熱狀態)，以數學型式描述如下，統御方程式：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (12a)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{k}{\rho C_p} \text{ 為熱擴散係數}$$

初始條件：

$$T(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t = 0 \quad (12b)$$

熱通量邊界條件：

$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = q(t), \quad x = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (12c)$$

絕熱邊界條件：

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = 0, \quad x = L, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (12d)$$

在進行實際模擬分析時，本研究選定之鋁板熱物參數如表 1。

表 1. 鋁板熱物參數暨離散取樣大小

參數值	說明
$\alpha = 97.1 \times 10^{-6} (m^2/s)$	熱擴散係數
$L = 0.05 (m)$	長度
$t_f = 100 (s)$	終止時間
$\Delta x = 0.01 (m)$	空間網格
$\Delta t = 1 (s)$	時間間隔

#### 3.2 熱作用現象分析暨重要因素選取

在解決學習問題時，若訓練過程輸入與

結果無關或僅有微弱關係的變數資料，或輸入相依性過高的變數資料，將大幅影響訓練結果，本研究將此概念導入 SVR 求解 IHCP 過程，在 SVR 開始訓練逆向估算模型前，先用數值模擬分析的方式從系統中的熱作用現象，在非受熱端歸納出與熱通量有強烈關係的因素，作為後續訓練資料選擇整理之依據。首先假設二組不同波形時變熱通量(斜線及弦波)如(13)式：

$$q(t) = 0 + 400t(W/m^2) \quad (13a)$$

$$q(t) = 17000 + 7000\sin(0.15t)(W/m^2) \quad (13b)$$

接著以 FDM 正解產生溫度分佈資料，觀察熱作用現象試著找出在非受熱端與熱通量變化有強烈關係的因素。研究發現在既有假設條件與限制下，非受熱端溫差值最能反映出熱通量的效應，繪出受熱端熱通量作用值以及絕熱端溫差值如圖 2 與圖 3，且從圖 3 中清楚看出熱通量作用峰值與溫差大小峰值時間點約有 5 秒的時間延遲。後續用 SVR 演算法訓練熱通量逆估算模型前，將先依據上述分析結果以每個離散點熱通量值當成輸出值，對應延遲 5 秒的溫差值當成輸入值，整理出適當訓練資料。

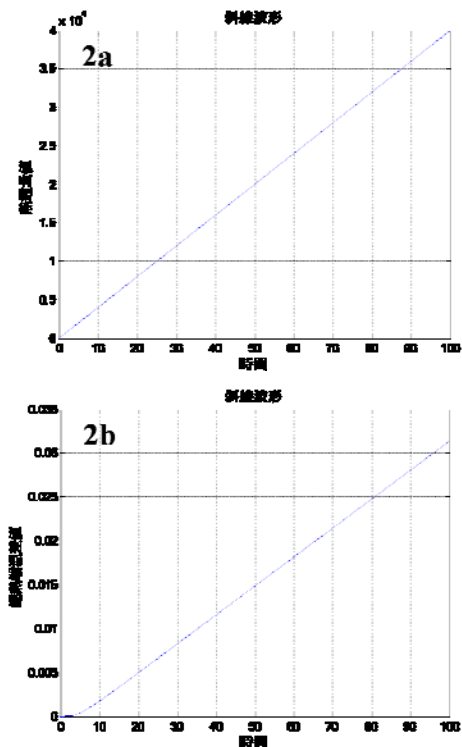


圖 2. 斜線波形：(a)熱通量值與時間關係圖；  
 (b)絕熱端溫差值與時間關係圖

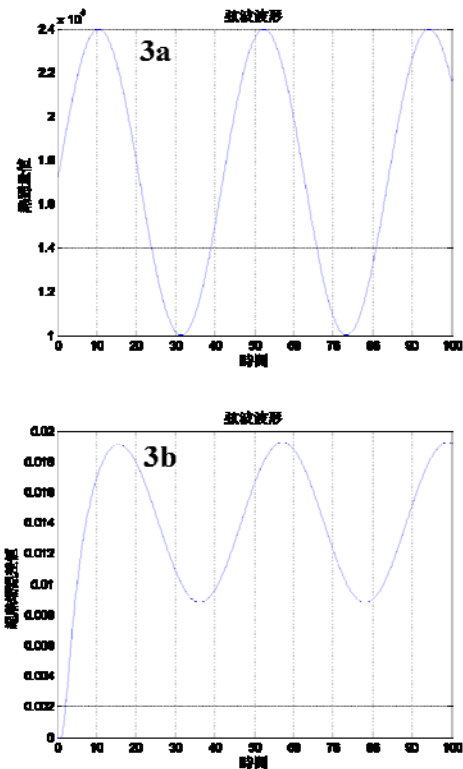


圖 3. 弦波波形：(a)熱通量值與時間關係圖；  
 (b)絕熱端溫差值與時間關係圖

#### 四、逆估算模型訓練與未知時變熱通量估算步驟

在進行估算模型訓練與測試時，除依循前一節問題描述與假設以及相關熱物參數設定外，我們並設計一組訓練用熱通量及四組測試用時變熱通量如表 2 與圖 4。從前一節歸納分析結果可知，熱通量逆估算模型在絕熱端的重要變數即為延遲 5 秒的溫差值，接著即依此歸納結果續進行逆向估算模型訓練與測試，綜述實驗流程如下：

- (1)用 SVR 建立逆向熱通量估算模型
  - (a)選用表 2 中的訓練用熱通量，用 FDM 正解產生溫度分佈資料。
  - (b)以每個離散點熱通量值當成輸出值，對應絕熱端延遲 5 秒的溫差值當成輸入值，整理出適當的訓練資料。
  - (c)用 SVR 演算法訓練，獲得逆向熱通量估算模型。
- (2)測試估算模型
  - (a)選用表 2 中的某一組測試用熱通量  $q$ ，用 FDM 正解產生溫度分佈資料。
  - (b)假設絕熱端處的溫度資料是用熱電偶所

量測到的，並假設熱通量  $q$  為未知。

- (c) 將絕熱端處延遲 5 秒的溫差值排列成測試資料。
- (d) 將測試資料輸入估算模型獲得估算之熱通量值  $\hat{q}$ 。
- (e) 將估算結果  $\hat{q}$  與實際熱通量  $q$  比較，判斷模型估測效能。

表 2. 訓練用與測試用時變熱通量時變函數

名稱	時變函數 ( $W/m^2$ )
訓練熱通量 (斜線)	$q(t) = 0 + 400t$
測試熱通量 1 (斜線)	$q(t) = 10000 + 200t$
測試熱通量 2 (三角波)	$q(t) = 10000 + 300t, \quad 0 \leq t \leq 50$ $q(t) = 25000 - 50(t - 50), \quad 50 < t \leq 100$
測試熱通量 3 (弦波)	$q(t) = 17000 + 7000\sin(0.15t)$
測試熱通量 4 (方波)	$q(t) = 10000, \quad 0 \leq t \leq 100/3$ $q(t) = 25000, \quad 100/3 < t \leq 200/3$ $q(t) = 15000, \quad 200/3 < t \leq 100$

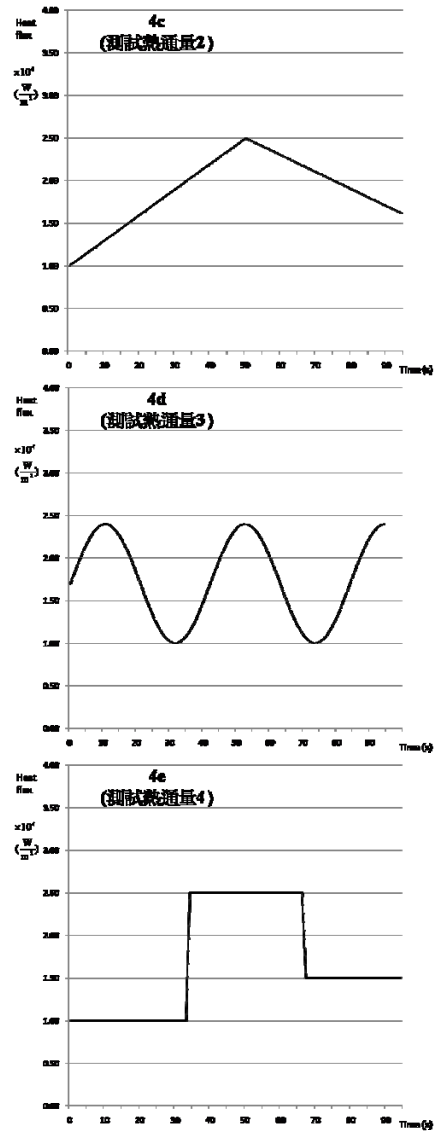
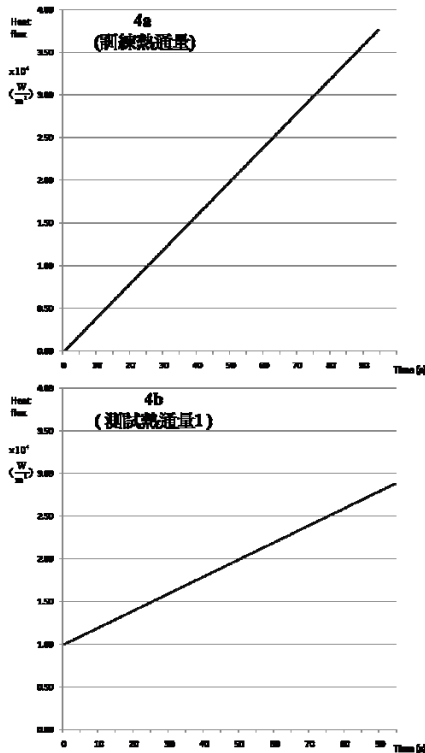


圖 4. (a)–(e) 訓練用與測試用時變熱通量波形

## 五、結果與討論

### 5.1 估算效能評判指標

為評判各案例所建立的逆向估算模型效能，列舉兩個常用的評判指標：

- (1) 誤差均方根 (Root Mean Square Error, RMSE) [21]

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [q(n) - \hat{q}(n)]^2} \quad (14)$$

其中

- $n$  代表時間步階  $n\Delta t$
- $N$  代表測試樣本總數量

$\hat{q}(n)$  是時間步階為  $n\Delta t$  時的離散熱通量估測值

$q(n)$  是時間步階為  $n\Delta t$  時的離散熱通量實際值

(2) 判定係數(Coefficient of determination,  $R^2$ ) [22]

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{n=1}^N [q(n) - \hat{q}(n)]^2}{\sum_{n=1}^N [q(n) - \bar{q}(n)]^2} \quad (15)$$

其中

$\bar{q}(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N q(n)$  表示所有離散熱通量實際值的平均值

### 5.2 逆向估算結果

我們從表 2 中選用斜線波形訓練熱通量，產生適當訓練資料交由 SVR 訓練出逆估算模型，然後依序用斜線熱通量、三角波熱通量、弦波熱通量及方波熱通量來進行模型測試驗證，估算結果如圖 5 所示。此案例 SVR 演算法是使用 Libsvm2.85 軟體[23]，選用 RBF 核函數並用交叉驗證法計算出最佳參數  $C=512$ ， $d=3$ ， $r=4$ ， $\varepsilon=0.0009765625$ 。

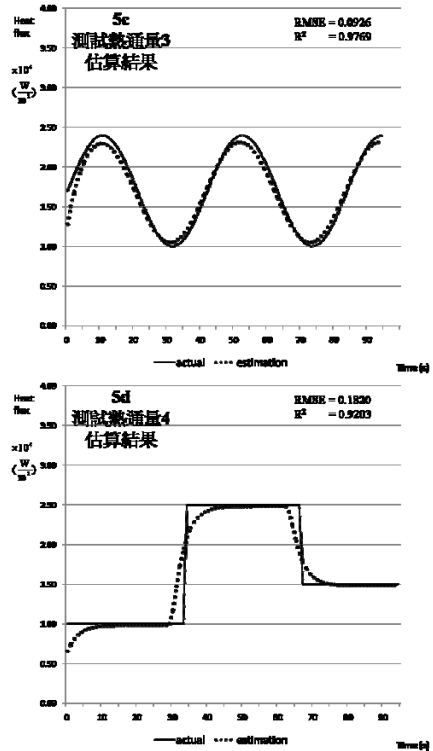
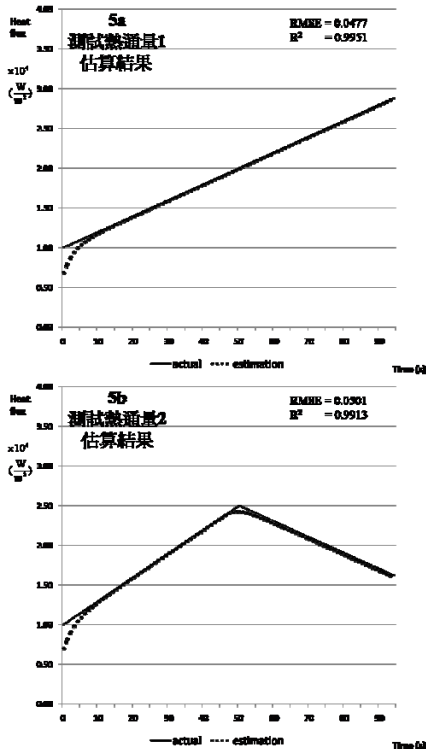


圖 5. (a)-(d) 測試熱通量 1-4 估算結果

### 5.3 驗證逆向估算穩定性

以數學觀點，適定問題 (Well-posed Problem) 的解具有存在、唯一且穩定特性，而不適定問題的解則不具備上述特性[24]，微小輸入誤差將會造成最後估算結果劇烈擾動，本研究探討的 IHCP 即屬於不適定問題範疇，因此在提出解決方法時亦必須驗證逆向求解的穩定性。

正規化法是解決不適定問題最常見技術，其理論原則是在逆估算過程中，除了維持誤差最小化外，另加入正規化項來維持解的穩定性，在逆向熱傳領域最早被用來估算未知熱通量的正規化方法，稱為全域正規化法[25]如(16)式：

$$\text{Min } S = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2 + \sigma \sum_{i=1}^n q_i^2 \quad (16)$$

其中  $S$  是目標函數， $\sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2$  是最小平方法所算出的誤差平方總合， $\sigma$  是正規化參數， $\sum_{i=1}^n q_i^2$  稱為全域零階正規化項。

SVR 演算法基於 SRM 最小化核思想，與正規化方法有異曲同工之妙。回顧 SVR 演

算法依據結構風險最小化原則，最小化目標函數如(4)式。比較(16)式與(4)式，其中  $C \sum_{i=1}^p |y - f(x_i, w)|_\epsilon$  與  $\sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2$  同樣是用來表示估算誤差(即訓練風險)，不同處在SVR採用不敏感損失函數，而全域正規化法採用最小平方損失函數；而  $\frac{1}{2} \|w\|^2$  是SVR運用最大間隔概念，進而實現結構風險最小化的核心技術，在與  $C \sum_{i=1}^p |y - f(x_i, w)|_\epsilon$  權衡的過程中找到最佳解，雖然出發點與全域正規化法中的  $\sigma \sum_{i=1}^n q_i^2$  不同，但同樣是在目標函數中扮演著權衡角色，對解的穩定性具有相當大貢獻[26]。所以SVR演算法本身即具備正規化特性，導入IHCP求解不需另外加入穩定機制，即可克服逆向求解的不適定問題。

我們用5.2節所獲得的迴歸模型，在進行各測試熱通量估算前，先在測試資料中加入合理的處理誤差，估算結果如圖6所示。此處所提的處理誤差，係包含了運用數值方法產生的離散誤差(Discretization Error)、計算機運算時產生的截斷誤差(Round-Off Error)及用熱電偶量測溫度時的量測誤差(Measurement Error)[27]。參考Özsisik等[28]及Beck等[29]對誤差的定義，本以下列方式引入處理誤差：

$$\Gamma + \Gamma * E \quad (17)$$

其中 $\Gamma$ 代表絕熱端處延遲5秒的溫差值所排列成測試資料， $E$ 是一個與 $\Gamma$ 同樣大小的隨機矩陣，內部各元素的值係遵循均值為零，標準差0.01的常態分佈隨機產生，所以 $\Gamma * E$ 係指在合理範圍內隨機產生的處理誤差，所以(17)式即代表加入合理誤差的測試資料。

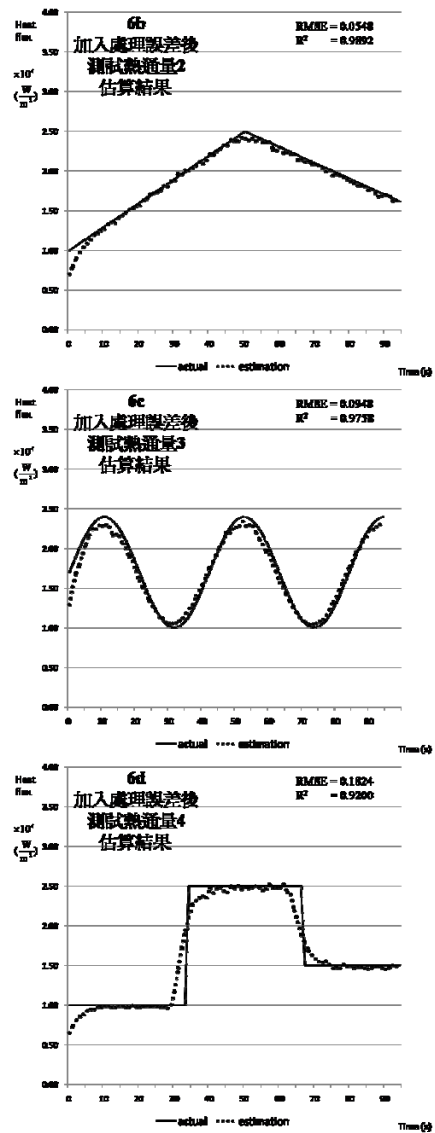
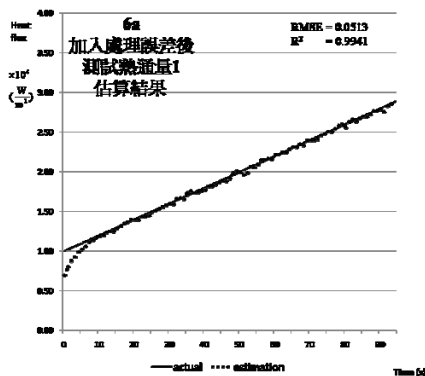


圖 6. (a)-(d) 加入處理誤差後估算結果

## 5.4 討論

將圖5及圖6的估算結果綜整如表3進行比較與討論如下：

- (1) 逆向估算模型建立後，對各種波形熱通量估算值雖仍有些微偏差，但已可明確掌握時變波形變化趨勢，估算結果收斂且良好。
- (2) 逆向估算模型具有非常優異的泛化能力，僅需用斜線熱通量進行訓練，後續即可用來估算各種不同波形熱通量。
- (3) 針對不同波形的測試熱通量，其估算準確率由高到低依序為斜線、三角波、弦波及方波，經探討應是本研究訓練估算模型時，是用絕熱端溫差值來對應受熱端熱通量，而方波在實際熱作用時，有兩處溫差



值在極短時間內會有劇烈變化，當用來進行逆估算時，即會造成估算結果在極短時間內的擾動而影響估算準確率。

- (4)不論何種熱源波形，估算結果在 $t=0$ 附近皆有特別大誤差，探討其原因亦是與溫差值在極短時間內會有劇烈變化。因研究中初始溫度假設為零，物理意義等同於初始熱通量為零，然而測試熱通量 1-4 在 $t=0$ 處都不是從零開始，所以造成熱通量劇烈跳躍導致溫差值在極短時間內會有劇烈變化。
- (5)從上述討論(3)與(4)可看出 SVR 逆估算時變熱通量不足處，若估算目標在極短時間內熱通量有劇烈跳躍狀況會對估算效能造成影響，在後續研究中可嘗試縮小時間間隔進行模擬，應可加快估算值追上實際值的速度，提昇估算精準度。
- (6)圖 6 估算結果展現極優異穩定效果，不會因為微小輸入誤差而產生劇烈擾動，證實 SVR 演算法可克服求解 IHCP 的不適定性。
- (7)實際物理意義上絕熱端溫度延遲現象與傅立葉數(Fourier Number)有關，本研究以延遲 5 秒方式排列溫差值當作測試資料，是依據問題假設暨選用的受熱材質以模擬方式所得，當問題範圍變更或受熱材質不同時，則需重新進行模擬分析觀察延遲效果。

表 3. 估算結果 RMSE 與  $R^2$  值綜整

圖號	熱通量編號	RMSE	$R^2$
圖 5	測試熱通量 1	0.0477	0.9951
	測試熱通量 2	0.0501	0.9913
	測試熱通量 3	0.0926	0.9769
	測試熱通量 4	0.1820	0.9203
圖 6	測試熱通量 1	0.0513	0.9941
	測試熱通量 2	0.0548	0.9892
	測試熱通量 3	0.0948	0.9758
	測試熱通量 4	0.1824	0.9200

## 六、結 論

本研究提出以 SVR 估算一維熱傳導未知時變邊界條件之方法，藉由機器學習演算法優勢解決複雜的逆向估算問題，有別於傳統求解方式需詳細逆向推導及繁瑣遞迴迭代才能逼近求解，此新方法僅找出逆向關係中的重要變數，其它複雜計算則交由支持向量迴歸演算法完成，最終的逆向迴歸模型是學

習網路透過適當訓練後得。研究中分別估算 4 組未知時變邊界熱通量，證明此方法計算時無需複雜推導，估算結果穩健良好且可克服逆估算之不適定現象，並具備良好之泛化能力。模擬估算過程中亦發現此方法求解 IHCP 不足處，若估算目標在極短時間內熱通量有劇烈跳躍狀況會降低估算效能，後續研究中可嘗試縮小時間間隔進行模擬，提昇估算精準度。

## 參考文獻

- [1] Beck, J. V., Blackwell, B., and Clair, C.R.ST., Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, Wiley, New York, pp. 3-4, 1985.
- [2] Huiping, L., Guoqun, Z., Shanting, N., and Yiguo, L., "Inverse Heat Conduction Analysis of Quenching Process Using Finite Element and Optimization Method," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, No. 12, pp. 1087-1096, 2006.
- [3] Yang, C. Y., "Direct and Inverse Solutions of the Two-dimensional Hyperbolic Heat Conduction Problems," *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 33, No. 6, pp. 2907-2918, 2009.
- [4] Lesnic, D., Elliott, L., and Ingham, D. B., "Application of the Boundary Element Method to Inverse Heat Conduction Problems," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 7, pp. 1503-1517, 1996.
- [5] Chen, T. S., Liu, C. C., Jang, H. Y., and Tuan, P. C., "Inverse Estimation of Heat Flux and Temperature in Multi-layer Gun Barrel," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 11-12, pp. 2060-2068, 2007.
- [6] Chen, T. S. and Liu, C. C., "Inverse Estimation of Heat Flux and Temperature on Nozzle Throat-insert Inner Contour," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 13-14, pp. 3571-3581, 2008.
- [7] Liu, F. B., "A Modified Genetic Algorithm for Solving the Inverse Heat Transfer Problem of Estimating Plan Heat Source," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 15-16, pp. 3745-3752, 2008.
- [8] Shi, J. and Wang, J., "Inverse Problem of

- Estimating Space and Time Dependent Hot Surface Heat Flux in Transient Transpiration Cooling Process,” *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 48, No. 7, pp. 1398-1404, 2009.
- [9] Wang, S. K., Lee, H. L., and Yang, Y. C., “Inverse Problem of Estimating Time-dependent Heat Generation in A Frictional Heated Strip and Foundation,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, No. 9, pp. 925-930, 2009.
- [10] Huang, C. H. and Liu, C. Y., “A Three-dimensional Inverse Geometry Problem in Estimating Simultaneously Two Interfacial Configurations in a Composite Domain,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, No. 1-3, pp. 48-57, 2010.
- [11] Yang, Y. C., Chu, S. S., Chang, W. J., and Wu, T. S., “Estimation of Heat Flux and Temperature Distributions in a Composite Strip and Homogeneous Foundation,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, No. 5, pp. 495-500, 2010.
- [12] Deng, S. and Hwang, Y., “Applying Neural Networks to the Solution of Forward and Inverse Heat Conduction Problems,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, No. 25-26, pp. 4732-4750, 2006.
- [13] Deng, S. and Hwang, Y., “Solution of Inverse Heat Conduction Problems Using Kalman Filter-enhanced Bayesian Back Propagation Neural Network Data Fusion,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 2089-2100, 2007.
- [14] Deng, S. and Hwang, Y., “Applying Neural Networks to the Solution of Inverse Heat Conduction Problem in a Gun Barrel,” *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 130, pp. 0312031-0312038, 2008.
- [15] Manickaraj, J. and Balasubramanian, N., “Estimation of the Heat Transfer Coefficient in a Liquid-Solid Fluidized Bed Using an Artificial Neural Network,” *Advanced Powder Technology*, Vol. 19, No. 2, pp. 119-130, 2008.
- [16] Chudzik, S., “The Idea of Using Artificial Neural Network in Measurement System with Hot Probe for Testing Parameters of Heat-insulating Materials,” *Measurement*, Vol. 42, No. 5, pp. 764-770, 2009.
- [17] Vapnik, V. N., “An Overview of Statistical Learning Theory,” *IEEE Transactions on neural network*, Vol. 10, No. 5, pp. 988-999, 1999.
- [18] Vapnik, V. N., The Nature of Statistical Learning Theory (Second Edition), Springer, New York, pp. 94-96, 2000.
- [19] Kecman, V., “Support Vector Machines -An Introduction,” in Support Vector Machines : Theory and Applications, Wang, L., Ed., Springer, New York, pp. 35-43, 2005.
- [20] Kecman, V., “Support Vector Machines -An Introduction,” in Support Vector Machines : Theory and Applications, Wang, L., Ed., Springer, New York, p. 36, 2005.
- [21] Özisik, M. N. and Orlande, H. R. B., Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications, Taylor&Francis, New York, p. 85, 2000.
- [22] Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., and Ye, K., Probability & Statistics: for Engineering & Scientists (Eight Edition), Pearson Prentice Hall, 2007, pp. 407-409.
- [23] <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm/>, LIBSVM -- A Library for Support Vector Machines, Chih-Chung Chang and Chih-Jen Lin.
- [24] Özisik, M. N. and Orlande, H. R. B., Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications, Taylor & Francis, New York, pp. 3-4, 2000.
- [25] Beck, J. V., Blackwell, B. and Clair, C. R. ST., Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, Wiley, New York, pp. 134-141, 1985.
- [26] Vapnik, V. N., The Nature of Statistical Learning Theory (Second Edition), Springer, New York, pp. 262-265, 2000.
- [27] Cengel, Y. A., HEAT AND MASS TRANSFER: A Practical Approach (Third Edition), McGraw-Hill, New York, pp. 296-297, 2006.
- [28] Beck, J. V., Blackwell, B. and Clair, C. R. ST., Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, Wiley, New York, pp. 170-172, 1985.
- [29] Özisik, M. N. and Orlande, H. R. B., Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications, Taylor & Francis, New York, pp. 9-11, 2000.